Exercice| [0909] | 1| Condition d'inversibilité

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice $A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&\alpha\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse dans ce cas.

Pistes de réflexion

— On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à 3.
— On procèdera ainsi à un échelonnement en ligne afin de déterminer son rang en fonction de α.

Éléments de correction

Étude de l'inversibilité de $A(\alpha)$ en fonction de α : La matrice $A(\alpha)\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, $\operatorname{rg}(A(\alpha))=3$.

Un échelonnement en ligne de $A(\alpha)$ donne :

$$A(\alpha)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&\alpha-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\sim_L}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&\alpha-7\end{pmatrix}$$

Par suite, le rang de A est égal à 3 si, et seulement si $\alpha-7\neq 0$ c'est à dire $\alpha\neq 7$.

La matrice $A(\alpha)$ est inversible si, et seulement si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

Recherche de l'inverse de la matrice $A(\alpha)$: Soit alors $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

On recherche l'inverse de la matrice $A(\alpha)$ en échelonnement en ligne la matrice augmentée $(A(\alpha)\,|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&4&0&1&0\\1&3&\alpha&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&2&\alpha-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Puisque } \alpha-7\neq 0 \text{ on fait :}\\L_2\leftarrow(\alpha-7)\,L_2-3L_3\\L_1\leftarrow(\alpha-7)\,L_1-L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha-7&\alpha-7&0&\alpha-8&2&-1\\0&\alpha-7&0&4-\alpha&\alpha-1&-3\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\alpha-7&0&0&2\alpha-12&3-\alpha&2\\0&\alpha-7&0&4-\alpha&\alpha-1&-3\\0&0&\alpha-7&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{et comme on a}\\\text{toujours } \alpha-7\neq 0\\L_1\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_1\\L_2\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_2\\L_3\leftarrow\frac{1}{\alpha-7}L_3}}{\sim_L}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2\alpha-12}{\alpha-7}&\frac{3-\alpha}{\alpha-7}&\frac{2}{\alpha-7}\\0&1&0&\frac{4-\alpha}{\alpha-7}&\frac{\alpha-1}{\alpha-7}&-\frac{3}{\alpha-7}\\0&0&1&\frac{1}{\alpha-7}&-\frac{2}{\alpha-7}&\frac{1}{\alpha-7}\end{array}\right)$$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{7\}$, la matrice $A(\alpha)$ est inversible d'inverse la matrice

$$(A(\alpha))^{-1}=\frac{1}{\alpha-7}\begin{pmatrix}2\alpha-12&3-\alpha&2\\4-\alpha&\alpha-1&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$