Exercice| [0868] | 1| Matrice d'une application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_5)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^5$ et $\mathcal{B}' = (f_1;\ f_2;\ f_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$, on considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les relations ci-dessous.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(e_1) & = & f_1 & + & 2f_2 & + & f_3 \\ f(e_2) & = & f_1 & + & f_2 & + & 2f_3 \\ f(e_3) & = & -f_1 & & & - & 3f_3 \\ f(e_4) & = & -f_1 & - & 4f_2 & + & f_3 \\ f(e_5) & = & f_1 & + & 4f_2 & - & f_3 \end{array}\right.$$

(1). Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Pistes de réflexion

(1). On dispose déjà de l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ en fonction de ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2). Puisque l'on connaît déjà une famille génératrice de l'image, on commencera par déterminer une base du noyau puis ensuite, on cherchera par le théorème du rang, la dimension de l'image, pour extraire de la famille génératrice déjà connue, une famille libre qui nous donnera la base de $\mathrm{Im}(f)$ cherchée.

Éléments de correction

(1). Puisque : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} f(e_1) & = & f_1 & + & 2f_2 & + & f_3 \\ f(e_2) & = & f_1 & + & f_2 & + & 2f_3 \\ f(e_3) & = & -f_1 & & & - & 3f_3 \\ f(e_4) & = & -f_1 & - & 4f_2 & + & f_3 \\ f(e_5) & = & f_1 & + & 4f_2 & - & f_3 \end{array}\right.$

par définition la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2). **Recherche du noyau de f :** par définition :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^5,\ f(x) = \overrightarrow{0}\right\}$$

On notera alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ la représentation matricielle de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} (x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow & \left(f(x) = \overrightarrow{0}\right) \\ & \Leftrightarrow & (AX = (0)) \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation matricielle } (A|0) \end{array}\right) \end{array}$$

On résout alors le système de représentation matricielle $(A|0)$ par échelonnement réduit en lignes :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, il vient :

$$\begin{array}{cl} & (x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathrm{Ker}(f)) \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & -x_3 & +3x_4 & -3x_5 \\ x_2 & = & 2x_3 & -2x_4 & +2x_5 \\ x_3 & = & x_3 & & \\ x_4 & = & & x_4 & \\ x_5 & = & & & x_5 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & (x \in \mathrm{Vect}\,((-1, 2, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 1, 0), (-3, 2, 0, 0, 1))) \end{array}$$

et par suite, on en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,((-1, 2, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 1, 0), (-3, 2, 0, 0, 1))$$

La famille $\mathcal{K} = \{(-1, 2, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 1, 0), (-3, 2, 0, 0, 1)\}$ est une famille libre.

En effet, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ est : $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{4}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 - 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, cette matrice étant de rang 3, et $\mathcal{K}$ étant une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^5$, elle est par théorème libre.

On en déduit donc que la famille $\mathcal{K} = \{(-1,2,1,0,0), (3,-2,0,1,0), (-3,2,0,0,1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

Dimension de $\mathrm{Im}(f)$ **:** dáprès le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^5\right)}_{=5} = \underbrace{\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)}_{=3} + \mathrm{rg}(f)$$

donc il vient que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et ainsi par définition que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Base de $\mathrm{Im}(f)$ **:** Par construction, les deux vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$.

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par théorème, ils forment un famille libre.

Par suite, la famille $\mathcal{F} = \{f(e_1), f(_2)\}$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ qui est un espace de dimension 2, donc par théorème, elle forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.