Exercice| [0834] | 1| Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire numérique dénombrable telle que si l'on note $\mathbb{P}([X = n]) = p_n$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $3p_{n+2} = 4p_{n+1} - p_n$.

(1). Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2). Déterminer la loi de X, puis en calculer son espérance et sa variance. On pourra s'intéresser à la variable $X + 1$.

(3). Soit Y la variable aléatoire telle que $Y = X - 1$ si $X \geq 1$ et $Y = 0$ si $X = 0$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Éléments de correction

(1). On trouve que $p_n = A + B \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2). La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1)A + B \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$ doit tendre vers 1 lorsque $n \to +\infty$, et donc $A = 0$ et $B = \frac{2}{3}$, d'où $p_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. On remarquera alors que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{3}$. Alors $E(X + 1) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ et $E(X) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, puis $v(X + 1) = v(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

(3). $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = E(X) - (1 - p_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, puis $E\left(Y^2\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - 2\sum_{k=1}^{\infty} kp_k + \sum_{k=1}^{\infty} p_k = E\left(X^2\right) - 2E(X) + 1 - p_0 = v(X) + E(X)^2 - 2E(X) + 1 - p_0 = \frac{1}{3}$.