Exercice| [0764] | 1| Limites

Déterminer les limites suivantes :

(1). Limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$

(2). Limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}-1-\sin(x)}{\cos(x)-1}$

(3). Limite en 0 de $x \longmapsto \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{\tan(x)-x}$

Pistes de réflexion

(1). On utilise le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ à un ordre suffisamment élevé pour obtenir un $DL_n(0)$ du numérateur, pour ensuite simplifier par x^2 pour obtenir une expression de ce quotient dont la limite en 0 n'est plus une forme indéterminée.

(2). Il s'agit de faire un $DL_n(0)$ de chacun des termes du numérateur et du dénominateur à un ordre pertinent.

(3). Là encore s'agit de faire un $DL_n(0)$ de chacun des termes du numérateur et du dénominateur à un ordre pertinent.

Éléments de correction

(1). Puisque $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} &= 1+\frac{2x}{2}-\frac{(2x)^2}{8}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\\ &= 1+x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2} &= \frac{1+x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)-1-x}{x^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)}{1}\\ &\underset{x\to0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2). On a directement :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\,x}-1-\sin(x)}{\cos(x)-1} &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)-1-\left(x+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)-1}\\ &= \frac{\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)}{-\frac{1}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)}\\ &\underset{x\to0}{\longrightarrow} -1\end{aligned}$$

(3). On a directement que :

$$\begin{aligned}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{\tan(x)-x} &= \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)\right)-x}\\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3}+\underset{x\to0}{o}\left(x^3\right)}\\ &= \frac{-\frac{1}{3}+\underset{x\to0}{o}(1)}{\frac{1}{3}+\underset{x\to0}{o}(1)}\\ &\underset{x\to0}{\longrightarrow} -1\end{aligned}$$