Exercice| [0680] | 1| Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} &= 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

(1). Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(2). Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). On reconnaît que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On commencera donc par écrire puis résoudre son équation caractéristique.

(2). On analysera l'expression obtenue précédemment et qui fait intervenir des suites géométriques pour obtenir le comportement en $+\infty$ de u_n.

Éléments de correction

(1). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$$

Son équation caractéristique est alors : $(\star) : r^2 - 4r + 1 = 0$

Le discriminant de $(\star)$ est $\Delta = 12$, donc $(\star)$ possède deux solutions réelles $r_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ et $r_2 = 2 - 2\sqrt{3}$.

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda\left(2 + 2\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2 - 2\sqrt{3}\right)^n$$

(λ, μ) doit vérifier les relations $\begin{cases} \lambda\left(2+2\sqrt{3}\right)^0 + \mu\left(2-2\sqrt{3}\right)^0 = u_0 \\ \lambda\left(2+2\sqrt{3}\right)^1 + \mu\left(2-2\sqrt{3}\right)^1 = u_1 \end{cases}$

c'est à dire $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \left(2+2\sqrt{3}\right)\lambda + \left(2-2\sqrt{3}\right)\mu = 4 \end{cases}$.

On résout ce système par échelonnement de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2+2\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} & 4 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \left(2+2\sqrt{3}\right)L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4\sqrt{3}}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \left(2+2\sqrt{3}\right)^n + \left(2-2\sqrt{3}\right)^n$

(2). On remarque que $2 + 2\sqrt{3} > 1$, donc $\left(2+2\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

De même, puisque $2 - 2\sqrt{3} \leq -1$, la suite de terme général $\left(2-2\sqrt{3}\right)^n$ est divergente.

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.