Exercice| [0675] | 1| Intégrales généralisées

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pistes de réflexion

- On commencera par identifier les bornes impropres.
- Pour la borne 0, on mettra en oeuvre le théorème d'́equivalence pour les intégrales de fonctions positives.
- Pour la borne $+\infty$, on pourra montrer par exemple que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et utiliser un théorème de comparaison.

Éléments de correction

On commence par remarquer que par définition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \left]0;+\infty\right[$, $t^x = \mathrm{e}^{\,x\ln(t)}$.
La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t^x}{\mathrm{e}-1}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes 0 et $+\infty$.
En notant $f(t)$ l'intégrande, f est une fonction continue et positive sur $]0;+\infty[$.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$: on sait que $\mathrm{e}^{\,t}-1 \underset{t\to0}{\sim} t$, donc $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t^x}{t} = t^{x-1}$.

Par ailleurs, on sait que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente si, et seulement si, $1-x<1$ c'est à dire $x>0$.
Par suite, d'après le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x>0$.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: il est immédiat que $\dfrac{\mathrm{e}^{\,t}-1}{\mathrm{e}^{\,t}} \lim t, +\infty 1$, donc $\mathrm{e}^{\,t}-1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,t}$.

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned} t^2 f(t) &= \frac{t^2\times t^x}{\mathrm{e}^{\,t}-1} \\ &= \frac{t^{2+x}}{\mathrm{e}^{\,x}-1} \\ &\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{2+x}}{\mathrm{e}^{\,t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées} \end{aligned}$$

Par conséquent $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et ce, quelque soit $x\in\mathbb{R}$.

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $x>0$.