Exercice| [0672] | 1| Intégrales généralisées

Établir la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} pour tout $n \geq 1$. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pistes de réflexion

— La convergence s'obtient à l'aide d'une comparaison à une intégrale de Rieman convergente.
— On procèdera à une intégration par parties sur I_n pour obtenir I_{n+1}.

Éléments de correction

Convergence de I_n : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale I_n est impropre en sa borne $+\infty$.

Par ailleurs, on a $f(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{2n}}$ et puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente puisque $2n > 1$, on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ d'après le théorème d'équivalence des intégrales de fonctions positives.

Relation entre I_{n+1} et I_n : Pour $a > 0$ en effectuant l'intégration par parties suivante dans $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = -\dfrac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ v(t) = t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = 1 \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0; a]$, il vient :

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^a + \int_0^a \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Avec $t^2 = (1+t^2) - 1$, on trouve : $\displaystyle\int_0^a \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$

Ainsi :
$$\begin{aligned} \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^a + 2n\left(\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}\right) \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^a + 2n\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Et finalement : $\displaystyle(1-2n)\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^a - 2n\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$

Puisque $\dfrac{a}{(1+a^2)^n} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit : $(1-2n)I_n = -2nI_{n+1}$ ou encore $(2n-1)I_n = 2nI_{n+1}$.

Expression de I_n en fonction de n : de la relation précédente, on a donc ainsi : $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

On a alors :
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \frac{2n-7}{2n-6} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-3) \times (2n-5) \times \ldots \times 3 \times 1 \times (2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2}{(2n-2) \times (2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2 \times (2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-3)!}{(2n-2)\left((2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2\right)^2} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-3)! \times (2n-2)}{(2n-2)\left((2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2\right)^2 \times (2n-2)} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-2)!}{\left((2n-2) \times (2n-4) \times \ldots \times 4 \times 2\right)^2} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-2)!}{\left(2(n-1) \times 2(n-1) \times \ldots \times 2\right)^2} \times I_1 \\ &= \frac{(2n-2)!}{\left(2^{n-1} \times (n-1)!\right)^2} \times I_1 \end{aligned}$$

Puisque $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, on en déduit par intégration directe que $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit le résultat.