Exercice| [0637] | 1| Manipuler les formules de probabilités conditionnelles

On suppose disposer dans cet exercice d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et l'on considère deux événements A et B tels que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 0{,}5 \\ \mathbb{P}(B) = 0{,}4 \\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}6 \end{cases}$$

(1). Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

(2). Calculer $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

Pistes de réflexion

(1). On utilisera la formule liant $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis on pourra décomposer B sur le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$.

(2). La formule définissant la probabilité conditionnelle intervenant ici est à mettre en correspondance avec les probabilités que l'on connait à ce stade et on utilisera ici le système complet d'événement $\{B, \overline{B}\}$.

Éléments de correction

(1). On sait que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Puisque $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ & \underset{\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0}{=} & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \end{array}$$

Ainsi, il vient que : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$

Finalement, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\right) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \\ & = & \mathbb{P}(A) + (1 - \mathbb{P}(A))\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \\ & = & 0,5 + 0,6 \times 0,5 \\ & = & 0,8 \end{array}$$

(2). Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a : $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})}$

Puisque $\{B, \overline{B}\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) & = & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ & \underset{\text{quest. } 1}{=} & \mathbb{P}(A) - \left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\right) \\ & = & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \end{array}$$

et finalement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{\overline{B}}(A) & = & \dfrac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}{\mathbb{P}(\overline{B})} \\ & = & \dfrac{0,5 - 0,4 + 0,5 \times 0,6}{0,6} \\ & = & \dfrac{0,4}{0,6} \\ & = & \dfrac{2}{3} \end{array}$$