Exercice| [0607] | 1| Suite arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & \frac{4}{3}u_n + 1 \end{cases}$

(1). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq -3$.

(2). En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3). Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(4). Étudier alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à un raisonnement par récurrence pour établir ce résultat.

(2). Le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ que l'on obtiendra notamment grâce au la question précédente après une factorisation judicieuse.

(3). On résout léquation $x = \frac{4}{3}x + 1$ pour obtenir l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4). Le coefficient $\frac{4}{3}$ permet de déterminer le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

(1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \geq -3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $u_0 = 1$ et $1 \geq -3$, donc $u_0 \geq -3$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $u_n \geq -3$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que $u_{n+1} \geq -3$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geq -3$.

donc : $\frac{4}{3}u_n \geq \frac{4}{3} \times (-3)$

et ainsi : $\underbrace{\frac{4}{3}u_n + 1}_{=u_{n+1}} \geq \underbrace{\frac{4}{3} \times (-3) + 1}_{=-3}$

ce qui donne $u_{n+1} \geq -3$, c'est à dire $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

(2). Le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

On a directement ici que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= \frac{4}{3}u_n + 1 - u_n \\ &= \frac{1}{3}u_n + 1 \\ &= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq 0} \underbrace{(u_n + 3)}_{\geq 0 \text{ car } u_n \geq -3}}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(3). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

En notant ℓ l'unique solution de l'équation $(\star)$: $x = \frac{4}{3}x + 1$, par théorème, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$

est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

La résolution de $(\star)$ donne :

$$\begin{aligned} \left(x = \frac{4}{3}x + 1\right) &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}x = 1\right) \\ &\Leftrightarrow (x = -3) \end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que $v_0 = 4$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= v_n - 3 \\ &= 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3 \end{aligned}$$

(4). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique avec $\frac{4}{3} > 1$. Par théorème, elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Or puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n - 3$

on a clairement que $4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et par suite, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.