Exercice| [0594] | 1| Famille génératrice d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On admet que le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_2 = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer une famille génératrice de F.

Pistes de réflexion

— Il s'agira d'exploiter la caractérisation des élémens de F en la traduisant sous forme d'un système de conditions qui permettra de voir les $4-$uplets d'éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui devront appartenir à F.

Éléments de correction

Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned}
((x_1,x_2,x_3,x_4) \in F) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2=0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_2-2x_3-2x_4=0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1-x_3-x_4=0 \\ -x_2-2x_3-2x_4=0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=-2x_3-2x_4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=-2x_3-2x_4 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=-2x_3-2x_4 \\ x_3=x_3+0x_4 \\ x_4=0x_3+x_4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow ((x_1,x_2,x_3,x_4) = x_3(1,-2,1,0)+x_4(1,-2,0,1)) \\
&\Leftrightarrow ((x_1,x_2,x_3,x_4) \in \text{Vect}((1,-2,1,0),(1,-2,0,1)))
\end{aligned}$$

et ainsi $F = \text{Vect}((1,-2,1,0),(1,-2,0,1))$ ce qui nous donne une famille génératrice.