Exercice| [0589] | 1| Suite arithmético-géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 & = & -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & 3u_n + 2 \end{cases}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Pistes de réflexion

— On reconnaîtra une suite arithmético-géométrique dont on pourra expliciter son terme général en fonction de n, et constater que ce dernier est constant.

— On pourra calculer les premiers termes, conjecturer un résultat pour u_n que l'on établira ensuite par récurrence.

Éléments de correction

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement une suite arithmético-géométrique.
L'équation $x = 3x + 2$ admettant pour unique solution le réel $\ell = -1$, par théorème, on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par $v_n = u_n + 1$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 0$.
Il vient alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0$
et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -1$
ce qui assure le caractère constant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.