Exercice| [0588] | 1| Récurrence

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.
Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

Pistes de réflexion

- L'initialisation ne pose pas vraiment de difficulté.
- Pour la partie hérédité, il s'agira d'utiliser a bon escient la croissance de la fonction carrée, en s'assurant en fait de la positivité des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, ce qui conduit à écrire une propriété de récurrence qui en tienne compte.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propoposition $\mathcal{P}(n)$:« $2 \geq u_n$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : par définition de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, on a $u_1 = 5$ et $2 \leq 5$, donc $2 \leq u_1$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$. Par suite $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $u_n \geq 2$.
Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $u_{n+1} \geq 2$.
Par hypothèse de récurrence, on a : $2 \leq u_n$ et par suite il vient que $\underbrace{2+2}_{=4\geq 0} \leq 2+u_n$.
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ il vient : $\underbrace{\sqrt{4}}_{=2} \leq \sqrt{2+u_n}$, ce qui donne $2 \leq u_{n+1}$ qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 1 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.