Exercice| [5267] | 1| Extrait BCE 2022 Filière BL

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n et h_n respectivement, les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f_n : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln(1+x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad h_n : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1} \end{array}\right.$$

(1). Dresser le tableau de variation de la fonction h_n sur son ensemble de définition.

(2). (a). Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ d'inconnue x, admet sur $]-1;+\infty[$ un unique solution x_0 que l'on déterminera.

(b). En déduire le signe de la fonction h_n sur $]-1;+\infty[$.

(3). Dans cette question, on étudie le cas particulier où $n = 1$.

(a). Préciser les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

(b). Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 sur son ensemble de définition.

(4). Dans cette question, on étudie le cas général où $n \geq 2$.

(a). On note f_n' la dérivée de la fonction f_n.
Exprimer pour tout $x > -1$, $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

(b). En distinguant les cas n impair et n pair, en déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1;+\infty[$

(5). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(a). Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera, tel que :

$$\forall x \in [0;1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

(b). Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$. En déduire la valeur de u_1.

(c). Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

(d). Établir l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n+1}$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

(6). Pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

(a). Établir la relation suivante : $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1],\ S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

(b). En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

(c). Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

Pistes de réflexion

(1). On calcule la dérivée de h_n, puis on en étudie son signe.

(2). (a). On pensera au théorème des valeurs intermédiaires, ou on procèdera à la résolution de l'équation.

(b). Il suffit de répercuter l'information précdente dans le tableau de variation de h_n.

(3). (a). On calcule la dérivée de f_1, puis on en étudie son signe.

(b). On identifiera et gérera les différentes formes indéterminées, en isolant les termes prépondérants.

(4). (a). On procède au calcul et on transforme l'expression de sorte à faire apparaître $h_n(x)$ dont on connaît le signe.

(b). On distingue les cas comme proposé, puis on utilise le signe de $h_n(x)$ pour conclure.

(5). (a). On réduit au même dénominateur, et on identifie.

(b). On primitive l'expression précédemment obtenue, et on effectue ensuite une intégration par parties.

(c). C'est une suite d'éléments positifs. . .et qui sera décroissante. On utilisera vraisemblablement la positivité de l'intégrale.

(d). On effectue une intégration par parties, et il reste à majorer en observant qu'il y a un terme positif que l'on soustrait au majorant cherché. Pour le reste, c'est le théorème d'encadrement.

(6). (a). On pensera à faire intervenir la somme d'une progression géométrique.

(b). Et il restera à intégrer la relation précdente.

(c). Puis on passera à la limite dans l'expression précdente.

Éléments de correction

(1). Limite en $+\infty$ de h_n : La limite en $+\infty$ du quotient de polynômes $\dfrac{x}{x+1}$ est exactement celle du quotient de ses monômes de plus haut degré $\dfrac{x}{x} = 1$ à savoir 1.
Par ailleurs, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $\ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition, $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que $n\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par somme, on en déduit donc que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite en -1^+ : On a tout d'abord que : $\forall x > -1,\ f(x) = \ln(1+x)\left(n + \dfrac{x}{(x+1)\ln(1+x)}\right)$
En posant $h = 1+x$, il vient que $(x+1)\ln(1+x) = h\ln(h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure que $(x+1)\ln(1+x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 0$. Comme au voisinage de 0^+, $\ln(h) < 0$, il vient qu'au voisinage de 0^+, $h\ln(h) < 0$ ce qui induit que $(1+x)\ln(1+x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 0$ par valeurs inférieures à 0.
Donc par quotient $\dfrac{x}{(x+1)\ln(1+x)} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} +\infty$.
Comme $x+1 \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$ et que $\ln(X) \underset{X\to0}{\longrightarrow} -\infty$, par composition, il vient que $\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Par conséquent par produit $h_n(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Variations de h_n : Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x+1$ sont clairement dérivables sur $]-1;+\infty[$, et comme $x \longmapsto x+1$ ne s'y annule pas, par quotient la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
La fonction $x \longmapsto x+1$ étant par ailleurs strictement positive sur $]-1;+\infty[$ et

la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et par suite il en est de même pour $x \longmapsto n\ln(1+x)$.
Finalement par somme, la fonction h_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ h_n'(x) &= \frac{n}{1+x} + \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{n(x+1)+1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{nx+n+1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $h_n'(x)$ sur $]-1;+\infty[$ est exactement celui de son numérateur $nx+n+1$. La fonction $x \longmapsto nx+n+1$ étant une fonction affine croissante qui s'annule en $-\dfrac{n+1}{n} = -1 - \dfrac{1}{n} < -1$ on en déduit le signe de cette dernière sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		$+\infty$
Signe de $nx+n+1$		$+$	

et par suite, on déduit le signe de $h_n'(x)$ et les variations de h_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$		$+$	
Variations de h_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(2). (a). D'après ce qui précède :
- h_n est continue sur $]-1;+\infty[$ par opérations usuelles sur les fonctions continues ;
- h_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$;
- les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition, même infinies, sont de signe opposées ;

ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution notée x_0 sur $]-1;+\infty[$.
Il est alors immédiat que $h_n(0) = 0$, et donc que $x_0 = 0$.

(b). Compte-tenu des variations de h_n sur $]-1;+\infty[$ et de la valeur de h_n en 0, on en déduit le signe de la fonction h_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	||		$+$		
Variations de h_n	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $h_n(x)$	||	$-$	0	$+$	

(3). (a). Par définition, on a : $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}\right.$.

Limite en -1^* : on a clairement que $1+x \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$ et donc par composition que $\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$. Donc par produit, il vient que $x\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite en $+\infty$: on a clairement que $1+x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc par composition que $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par produit, il vient que $x\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b). Par définition, on a : $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}\right.$.

La fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle. La fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Par suite, par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, la fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ f_1'(x) &= 1\times\ln(1+x) + x\times\frac{1}{x+1}\\ &= h_1(x)\end{aligned}$$

De la question **Q4**, on en déduit alors le signe de $f_1'(x)$ puis les variations de f_1 sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f_1	|| $+\infty$	$\searrow$	$f_1(0) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$

(4). (a). La fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle. La fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x^n$ étant dérivable sur $]-1;+\infty[$, par suite, par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, la fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1;+\infty[\,,\ f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + x^n \times \frac{1}{x+1}\\ &= x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}\right)\\ &= x^{n-1}h_n(x)\end{aligned}$$

(b). On sait que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$

Si n est impair : alors $n-1$ est pair, et par suite : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ x^{n-1} \geq 0$ ce qui assure que $f_n'(x)$ est du même signe que $h_n(x)$ sur $]-1;+\infty[$.
Sur le même principe que pour le calcul des limites de f_1 en -1 et $+\infty$, on peut montrer que $f_n(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit alors les variations de f_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(0)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est pair : alors $n-1$ est impair, et par suite l'expression x^{n-1} change de signe en 0.
Sur le même principe que pour le calcul des limites de f_1 en -1 et $+\infty$, on peut montrer que $f_n(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit alors les variations de f_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de x^{n-1}		$-$	0	$+$	
Signe de $h_n(x)$	||	$-$	0	$+$	
Signe de $f_n'(x)$	||	$+$	0	$+$	
Variations de f_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(5). (a). Il est clair que : $\forall x \in [0;1]\,,\ ax+b+\dfrac{c}{1+x} = \dfrac{ax(1+x)+b(1+x)+c}{1+x} = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{1+x}$

Ainsi, par identification des deux numérateurs, (a,b,c) est solution du système $\begin{cases} a &= 1\\ a+b &= 0\\ b+c &= 0\end{cases}$ ce qui amène directement à $\begin{cases} a &= 1\\ b &= -1\\ c &= 1\end{cases}$, et par suite : $\forall x \in [0;1]\,,\ \dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$

(b). Par linéarité de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &\underset{\substack{1+x>0\\ \textbf{sur } [0;1]}}{=} \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 + [\ln(1+x)]_0^1\\ &= \frac{1}{2}-1+0+\ln(2)-\ln(1)\\ &= \ln(2)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par définition, on a : $u_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(1+x) \quad \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad u'(x) = \frac{1}{1+x}\\ v(x) &= \frac{x^2}{2} \quad \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad v'(x) = x\end{aligned}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, il vient :

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\times\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(c). Les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont données par le signe de $u_{n+1}-u_n$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(1+x) - x^n\ln(1+x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Il est clair que : $\forall x \in [0;1]\,,\ \begin{cases} x^n &\geq 0\\ 1-x &\leq 0\\ \ln(1+x) &\geq 0\end{cases}$

donc que : $\forall x \in [0;1]\,,\; x^n\,(x-1)\ln(1+x) \leq 0$.
La fonction $x \longmapsto x^n\,(x-1)\ln(1+x)$ étant continue sur $[0;1]$ et négative sur cet intervalle, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n\,(1-x)\ln(1+x) \leq 0$, et par conséquent que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(d). Encadrement : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est clairement croissante sur $[0;1]$ par composée de fonctions croissantes, donc il vient que : $\forall x \in [0;1]\,,\; \ln(1+0) \leq \ln(1+x) \leq \ln(1+1)$
Par ailleurs : $\forall x \in [0;1]\,,\; 0 \leq x^n$
il vient que : $\forall x \in [0;1]\,,\; 0 \leq x^n\ln(1+x) \leq x^n\ln(2)$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leq \underbrace{\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}_{=u_n} \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(2)x^n\,\mathrm{d}x$

Or il est clair que :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(2)x^n\,\mathrm{d}x &= \ln(2)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\ &= \ln(2)\left(\frac{1}{n+1}-0\right)\\ &= \frac{\ln(2)}{n+1}\end{aligned}$$

Limite de $(u_n)_{n\geq 1}$: puisque $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $\dfrac{\ln(2)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par le théorème d'encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(6). (a). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$.
On remarque tout d'abord que : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n}(-x)^k$
Comme $x \in [0;1]$, on a bien $-x \neq 1$, et il vient alors que :
$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}\\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x}\\ &\underset{(-1)^n=(-1)^{n+2}}{=} \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)nx^{n+1}}{x+1}\end{aligned}$$

(b). Par linéarité de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{n}(-x)^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1(-x)^k\,\mathrm{d}x\right)$

Comme on a :
$$\begin{aligned}\int_0^1(-x)^k\,\mathrm{d}x &= (-1)^k\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^k\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\ &= (-1)^k\left(\frac{1}{k+1}-0\right)\\ &= \frac{(-1)^k}{k+1}\end{aligned}$$

il vient alors que : $\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{n}(-x)^k\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

ou encore que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

Or on a aussi :
$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + (-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &\underset{\substack{1+x>0\\ \textbf{sur }[0;1]}}{=} [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2)-\ln(1)+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln(2)+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ce qui assure donc bien que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

(c). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a clairement que : $\forall x \in [0;1]\,,\; 0 \leq 1 \leq 1+x$
et donc par passage à l'inverse que : $\forall x \in [0;1]\,,\; 0 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$
et comme $x^{n+1} \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$, on a donc : $\forall x \in [0;1]\,,\; 0 \leq \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$
Par croissance de l'intégrale, il vient alors que : $0 \leq \displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{n+2}}$

Comme $\dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème d'encadrement il vient que : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
ce qui assure finalement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.