Exercice| [5161] | 1| Utilisation d'une minoration

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(1). Justifier que : $\forall k \in [\![n+1; 2n]\!]\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(2). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} - u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$.

(3). En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). On utilisera la croissance de la fonction racine carrée et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2). On commencera par expliciter la différence $u_{2n} - u_n$, et on sommera les inégalités précédentes dont on explicitera les termes minorants et majorants en fonction de n.

(3). On utilisera le fait que $u_n \geq 0$ pour remarquer que le terme général de la suite extraite d'indice pair de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par celui d'une suite qui diverge vers $+\infty$.

Éléments de correction

(1). Soit $k \in [\![n+1; 2n]\!]$. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient que alors $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{2n}$.

La fonction inverse étant quant à elle décroissante sur $]0; +\infty[$, il vient alors que : $\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

(2). On a directement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \times (2n - (n+1) + 1) \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

(3). Si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeait, toutes ses suites extraites convergeraient vers la même limite, accessoirement la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, et donc la différence $u_{2n} - u_n$ devrait converger vers 0 ce qui n'est clairement pas le cas d'après le théorème de divergence par minoration.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc divergente, et comme il s'agit d'une suite croissante car somme de termes tous positifs, elle ne peut que diverger vers $+\infty$.