Exercice| [5160] | 1| Utilisation du théorème d'encadrement

Dans tout cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

(1). Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

(2). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{na}{n+a} \leq \ln(u_n) \leq a$

(3). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à deux études de fonctions pour obtenir l'inégalité de gauche, puis celle de droite.

(2). On commence par expliciter $\ln(u_n)$ et on utilisera l'inégalité précédente pour obtenir l'encadrement voulu.

(3). On applique le théorème d'encadrement pour obtenir la limite de la suite de terme général $\ln(u_n)$, puis on composera par la fonction exponentielle pour revenir à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

(1). Une étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - x$ montre que cette dernière est positive sur le domaine de définition de celle-co, ce qui donne la majoration de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Une étude de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ montre que cette dernière est négative sur le domaine de définition de celle-ci, ce qui donne la minoration de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

(2). Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$

et en appliquant l'inégalité précédente, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leq \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \leq \frac{a}{n}$$

et on obtient l'encadrement voulu en multipliant ce dernier par $n \geq 0$.

(3). Puisque $\dfrac{na}{n+a} = \dfrac{a}{1+\frac{a}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, par le théoème d'encadrement, il vient que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

et par suite, par composition par la fonction exponentielle, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{a}$.