Exercice| [5159] | 1| Utilisation du théorème d'encadrement

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\, u_n & \in & [0;1] \\ \forall n\in\mathbb{N},\, v_n & \in & [0;1] \\ u_n\times v_n & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & 1 \end{cases}$

(1). Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\, u_n\times v_n \leq v_n \leq 1$

(2). En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3). En est-il de même pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Pistes de réflexion

(1). On exploitera le fait que les suites sont à valeurs dans $[0;1]$ en se souvenant que multiplier une quantité positive par un nombre inférieur à 1 en valeur absolue donne un résultat plus petit que la quantité précédente.

(2). On mobilisera le théoème d'encadrement pour conclure.

(3). Le rôle des deux suites est clairement symétrique.

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que : $\forall n\in\mathbb{N},\, 0\leq u_n\leq 1$
donc comme $v_n\geq 0$, il vient que : $\forall n\in\mathbb{N},\, 0\leq u_n\times v_n\leq v_n$
et comme $v_n\leq 1$, il vient que : $\forall n\in\mathbb{N},\, 0\leq u_n\times v_n\leq 1$

(2). Puisque $u_n\times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement précédent, donne que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(3). Le rôle des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant symétrique, on en déduit aussi que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.