Exercice| [5158] | 1| Utilisation du théorème d'encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^3} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(2). Qu'en conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que si $k \in [\![1;n]\!]$, alors $k^2 \in \left[1;n^2\right]$, ce qui permettra par sommation de ces inégalités d'obtenir l'encadrement souhaité pour u_n.

(2). On mobilisera le théorème de convergence par encadrement pour conclure.

Éléments de correction

(1). Il est clair que : $\forall k \in [\![1;n]\!]\,,\ \leq k^2 \leq n^2$

Donc par sommation de ces inégalités, il vient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} n^2}_{=n\times n^2}$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \underbrace{\dfrac{n^3}{n^4}}_{=\frac{1}{n}}$

Sur le même principe : $\forall n \in [\![1;n]\!]\,,\ 1 \leq k$

Donc par sommation de ces inégalités, il vient que : $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{\dfrac{n}{n^4}}_{=\frac{1}{n^3}} \leq u_n$.

Et on obtient ainsi l'encadrement voulu.

(2). Puisque $\dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement précédemment obtenu, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.