Exercice| [5157] | 1| Utilisation d'une minoration

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{u_n} \end{array}\right.$

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n \geq 1$.

(2). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq n$.

(3). Qu'en conclure pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pistes de réflexion

(1). On utilisera l'inégalité portant sur la fonction exponentielle et sa tangente en 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\, \mathrm{e}^x \geq x+1$.

(2). La différence $u_{n+1} - u_n$ fait penser à sommer ces inégalités de sorte à faire apparaître un téléscopage de termes pour obtenir la relation attendue.

(3). On moblisera le théorème de divergence par minoration pour conclure.

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - u_n$.
Or on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x$
Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \mathrm{e}^{u_n} \geq 1 + u_n$
ce qui donne que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \underbrace{\mathrm{e}^{u_n} - u_n}_{=u_{n+1}-u_n} \geq 1$

(2). Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n - u_{n-1} \geq 1$

par sommation de ces inégalités, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})}_{=u_n-u_0} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n}$

ce qui amène : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq n$.

(3). Comme le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par celle de terme général n et comme $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après le théorème de divergence par minoration, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.