Exercice| [5156] | 1

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous, étudier la convergence de cette dernière et donner le cas échéant la valeur de sa limite.

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 6$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\times 2^n - \frac{1}{\mathrm{e}^n}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3(-4)^n + 2^n$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n-1}{3^n-1}$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Expression de u_n	Termes de la forme q^n
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$	

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites :
- on remarquera que le terme général contient un ou plusieurs termes de la forme q^n ;
- on explicitera la limite de chacun de ses termes en fonction de la valeur de q ;
- on concluera quant à la convergence de la suite en levant les formes indéterminées.

Éléments de correction

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 6$$

Termes de la forme q^n

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

Limite des termes en q^n | Justification

$\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\left(-\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\times 0+6 = 6$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\times 2^n - \frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

Termes de la forme q^n

2^n et $\frac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$

Limite des termes en q^n | Justification

$|2| \geq 1$ donc $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\left|\frac{1}{\mathrm{e}}\right| < 1$ donc $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}$$

Termes de la forme q^n

$\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et $\frac{1}{2}^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Limite des termes en q^n | Justification

$\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\left(-\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3(-4)^n + 2^n$$

Termes de la forme q^n

$(-4)^n$ et 2^n

Limite des termes en q^n | Justification

$-4 \leq -11$ donc $(-4)^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$

$2 > 1$ donc $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n-1}{3^n-1}$$

Termes de la forme q^n

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ après factorisation par 2^n et 3^n

Limite des termes en q^n | Justification

$3 > 1$ donc $3^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$$\frac{2^n-1}{3^n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Termes de la forme q^n

2^n après développement

Limite des termes en q^n | Justification

$2 > 1$ donc $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

Termes de la forme q^n

2^n et $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ après factorisation par 2^n

Limite des termes en q^n | Justification	Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ | Limite
$2 > 1$ donc $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\left\lvert\dfrac{1}{6}\right\rvert < 1$ donc $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$