Exercice| [5155] | 1| Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression du terme général en fonction de n.

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= 4u_{n+1}-4u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\Big\{$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}+3u_{n+1} &= -2u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\Big\{$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= -1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= \frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n) \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\Big\{$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= 4u_{n+1}-u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

Solution(s) de $(\star)$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Système vérifié par (λ,μ)

$\Big\{$

Valeurs de λ et μ

Expression de u_n

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \dots$

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données :

— On explicite l'équation caractéristique de la suite et on la résout ;

— À partir des solutions précédemment obtenues, on donne la forme u_n en fonction de n et de deux paramètres ;

— On détermine les deux paramètres en utilisant les valeurs u_0 et u_1 données en résolvant un système.

— On explicite alors complètement u_n en fonction de n.

Éléments de correction

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Solution(s) de $(\star)$

$$r = 2$$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n 2^n + \mu 2^n$$

Système vérifié par (λ,μ)

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ 2\lambda + 2 = 1 \end{cases}$$

Valeurs de λ et μ

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{n}{2} \times 2^n + 2^n$$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 3u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Solution(s) de $(\star)$

-1 et -2

Forme de u_n | $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n$$

Système vérifié par (λ,μ)

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda - 2\mu = 4 \end{cases}$$

Valeurs de λ et μ

$$\begin{cases} \lambda = 8 \\ \mu = -6 \end{cases}$$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 8 \times (-1)^n) - 6 \times (-2)^n$$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

Solution(s) de $(\star)$

1 et $-\frac{1}{2}$

Forme de u_n | $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Système vérifié par (λ,μ)

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = -1 \end{cases}$$

Valeurs de λ et μ

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Expression de u_n

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique $(\star)$

$$r^2 - 4r + 1 = 0$$

Solution(s) de $(\star)$

$2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$

Forme de $u_n \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \mu \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$

Système vérifié par (λ, μ)

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)\lambda + \left(2 + \sqrt{3}\right)\mu = 4 \end{cases}$$

Valeurs de λ et μ

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$