Exercice| [5154] | 1| Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression du terme général en fonction de n.

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} &=& \dfrac{1}{2}u_n+3 \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \dots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Expression de u_n

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& -2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} &=& \dfrac{1}{2}u_n-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \dots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Expression de u_n

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} &=& \dfrac{4}{3}u_n+1 \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : ... | $v_0 = \dots$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n\in\mathbb{N}, v_n =\dots$

Expression de u_n

Pistes de réflexion

Pour chacune des suites arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{n+1} = au_n + b$:

- On cherchera la solution ℓ de l'équation $x = ax + b$;
- On introduira une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de u_n et ℓ qui sera une suite géométrique ;
- On exprimera v_n en fonction de n, puis on explicitera u_n en fonction de n à partir de la relation qui lie v_n et u_n.

Éléments de correction

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} &=& \dfrac{1}{2}u_n+3 \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

$x = \dfrac{1}{2}x + 3$ | $x = 6$

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 6$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : $\frac{1}{2}$ | $v_0 = -4$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \dots$

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

$$x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{2}{3}$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : $\frac{1}{2}$ | $v_0 = -\frac{4}{3}$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \frac{4}{3}u_n + 1 \end{array}\right.$$

Équation à résoudre | Résolution

$$x = \frac{4}{3} + 1$$

$$x = -3$$

Suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 3$

Éléments caractéristiques de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Raison : $\frac{4}{3}$ | $v_0 = 4$

Expression de v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Expression de u_n

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -3 + 4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$