Exercice| [5152] | 1| Matrices aléatoires | G2E 2018 Filière BCPST

Soit $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$ ù X désigne une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,4)$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Exprimer à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, la probabilité :

(1). p_1 que la matrice M possède deux valeurs propres réelles distinctes.

(2). p_2 que la matrice M possède des valeurs propres complexes non réelles.

(3). p_3 que la matrice M possède deux valeurs propres imaginaires pures.

Pistes de réflexion

(1). On pourra dans un premier temps s'intéresser á l'inversibilité de la matrice $M - \lambda \mathrm{I}_2$ par le calcul de son déterminant que l'on traduira ensuite en terme de probabilité portant sur des événements décrits à l'aide X.

(2). On se contente de reprendre les discussions précédentes.

(3). On se contente de reprendre les discussions précédentes.

Éléments de correction

On a : $(M - \lambda \mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (2X-\lambda)\,x & + & y & = & 0 \\ -4x & + & (X-\lambda)\,y & = & 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (2X-\lambda)\,x & + & y & = & 0 \\ (-4(X-\lambda)(\lambda-2X))\,x & & & = & 0 \end{array} \right.$

Ainsi, les valeurs propres de M sont les racines du polynôme $-4(X-\lambda)(\lambda-2X) = -\lambda^2 + 3X\lambda - 4 - 2X^2$ dont le discriminant vaut $X^2 - 16$.

(1). M possêde deux valeurs propres réelles distinctes si, et seulement si, $X^2 - 16 > 0$, c'est à dire $X > 4$ ou $X < -4$.

Ainsi : $\begin{array}{rcl} p_1 & = & \mathbb{P}([X>4] \cup [X<-4]) \\ & = & 1 - \mathbb{P}([-4 \leq X \leq 4]) \\ & = & 1 - (\Phi(1) - \Phi(-1)) \\ & = & 2(1-\Phi(1)) \end{array}$

(2). M possêde deux valeurs propres complexes non réelles si, et seulement si $X^2 - 16 < 0$, c'est à dire $-4 < X < 4$, ce qui donne $p_2 = 1 - p_1$.

(3). M possêde deux valeurs propres imaginaires pures si, et seulement si, $X^2 - 16 = 0$ et $X = 0$, donc $p_3 = \mathbb{P}([X=0])$, c'est à dire $p_3 = 0$.