

Exercice [5130] | 1 | Vecteurs propres provenant de la base canonique

En observant les colonnes des matrices suivantes, donner pour chacune d'entre elles une ou plusieurs valeurs propres, ainsi qu'un vecteur propre associé pour chacune d'entre elles.

Matrice A	Matrice B	Matrice C	Matrice F
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)
Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)

Pistes de réflexion

— Si l'on remarque que la colonne C_i est colinéaire à la matrice colonne représentant le i^{e} vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 , on en déduit que le coefficient de colinéarité obtenu est une valeur propre de A et on dispose directement d'un vecteur propre de A .

Éléments de correction

Matrice A	Matrice B
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Valeur(s) propre(s)	Valeur(s) propre(s)
2	3
Vecteur(s) propre(s)	Vecteur(s) propre(s)
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matrice C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Valeur(s) propre(s)

-1

Vecteur(s) propre(s)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matrice F

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Valeur(s) propre(s)

2 et -2

Vecteur(s) propre(s)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$