

Exercice [5129] | 1 | Vecteur propre trivial

Parmi les matrices suivantes, toutes admettent le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre, sauf une... et lorsque c'est le cas, préciser la valeur propre associée.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée	Valeur propre associée

Pistes de réflexion

— On se souviendra de la formule donnant le terme général du produit de deux matrices, pour remarquer que multiplier une matrice par la matrice colonne proposée revient à calculer la somme de chacun ligne pour chacun des coefficients du produit.

Éléments de correction

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Valeur propre associée	Valeur propre associée
$3 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$1 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$2 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$1 \text{ car } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$1 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$-1 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$4 \text{ car } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeur propre associée

$$-3 \text{ car } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$