Exercice| [5128] | 1| Matrice admettant 0 pour valeur propre

En observant les colonnes des matrices suivantes, écrire une combinaison linéaire portant sur une ou plusieurs colonnes, pour établir que 0 est valeur propre de A, puis expliciter le sous-espace propre $E_0(A)$ complètement.

Matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(A) =$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$\dim\,(E_0(A))$

$\dim\,(E_0(A)) =$

Base de $E_0(A)$

$E_0(A) = \mathrm{Vect}$

Matrice B

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(B) =$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$\dim\,(E_0(B))$

$\dim\,(E_0(B)) =$

Base de $E_0(B)$

$E_0(B) = \mathrm{Vect}$

Matrice C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(C) =$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$\dim\,(E_0(C))$

$\dim\,(E_0(C)) =$

Base de $E_0(C)$

$E_0(C) = \mathrm{Vect}$

Matrice G

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(G) =$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$\dim\,(E_0(G))$

$\dim\,(E_0(G)) =$

Base de $E_0(G)$

$E_0(G) = \mathrm{Vect}$

Matrice H

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(H) =$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$\dim\,(E_0(H))$

$\dim\,(E_0(H)) =$

Base de $E_0(H)$

$E_0(H) = \mathrm{Vect}$

Pistes de réflexion

— En désignant C_i les colonnes de A, si on remarque par exemple que $C_1 - C_2 + C_3 = (0)$, cela signifie que l'on aura $A\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc que l'on dispose d'un vecteur colonne non nul C tel que $AC = 0.C$ ce qui assure que 0 est valeur propre de A.

— Une fois ce premier vecteur propre exhibé, il s'agira de s'assurer du rang de la matrice A pour voir si $E_0(A)$ est de dimension 1 ou 2, et donc d'être amené ou non à chercher un autre vecteur.

Éléments de correction

Matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(A) = 2$ car $L_2 = L_3$ et (L_1, L_2) libre

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$2C_1 - C_3 = (0)$

$\dim\,(E_0(A))$

$\dim\,(E_0(A)) = 1$

Base de $E_0(A)$

$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Matrice B

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(B) = 2$ car $L_1 + L_2 - L_3 = (0)$ et (L_1, L_2) libre

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$C_2 + C_1 - C_3 = (0)$

$\dim\,(E_0(B))$

$\dim\,(E_0(B)) = 1$

Base de $E_0(B)$

$E_0(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Matrice C

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(C) = 1$ car $L_2 = 2L_1$ et $L_3 = 3L_1$

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$$\begin{aligned}2C_1 - C_2 &= (0)\\ 3C_1 - C_3 &= (0)\end{aligned}$$

$\dim\,(E_0(C))$

$\dim\,(E_0(C)) = 2$

Base de $E_0(C)$

$$E_0(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Matrice G

$$\begin{pmatrix}11 & -5 & 5\\ -5 & 3 & -3\\ 5 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(G) =$ car $L_3 = -L_2$ et (L_1, L_2) libre

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$$C_2 + C_3 = (0)$$

$\dim\,(E_0(G))$

$\dim\,(E_0(G)) = 1$

Base de $E_0(G)$

$$E_0(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Matrice H

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(H) = 2$ car $L_1 - L_2 + L_3 = (0)$ et (L_1, L_2) libre

Combinaison(s) linéaire(s) nulle(s) entre C_1, C_2 et C_3

$$C1 - 2C_2 + C_3 = (0)$$

$\dim\,(E_0(H))$

$\dim\,(E_0(H)) = 1$

Base de $E_0(H)$

$$E_0(H) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$