Exercice| [5127] | 1| Éléments propres et diagonalisation

Matrice A

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, 16\}$

$A = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $A - 0\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_0(A))$

$$A - 0\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_0(A)) =$

Base de $E_0(A)$

Vect

Rang de $A - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(A))$

$$A - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(A)) =$

Base de $E_1(A)$

Vect

Rang de $A - 16\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{16}(A))$

$$A - 16\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -5 & -13 & -3 \\ 5 & -3 & -16 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{16}(A)) =$

Base de $E_{16}(A)$

Vect

Matrice B

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(B) = \{1, 3, -4\}$

$B = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $B - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(B))$

$$B - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(B)) =$

Base de $E_1(B)$

Vect

Rang de $B - 3\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3(B))$

$$B - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_3(B)) =$

Base de $E_3(B)$

Vect

Rang de $B + 4\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{-4}(B))$

$$B + 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-4}(B)) =$

Base de $E_{-4}(B)$

Vect

Matrice C

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(C) = \{3, 1, -1\}$

$C = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $C - 3\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3(C))$

$$C - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_3(C)) =$

Base de $E_3(C)$

Vect

Rang de $C - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(C))$

$$C - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(C)) =$

Base de $E_1(C)$

Vect

Rang de $C + 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{-1}(C))$

$$C + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-1}(C)) =$

Base de $E_{-1}(C)$

Vect

Matrice F

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(F) = \{-1, 2\}$

$F = PDP^{-1}$

$D =$

$P =$

Rang de $F + 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3 - 1(F))$

$$F + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-1}(F)) =$

Base de $E_{-1}(F)$

Vect

Rang de $F - 2\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_2(F))$

$$F - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_2(F)) =$

Base de $E_2(F)$

Vect

Pistes de réflexion

— On se rappelle que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda \mathrm{I}_3)$. La connaissance du rang de la matrice $A - \lambda\mathrm{I}_3$ donnera la dimension de $E_\lambda(A)$ par le théorème du rang, et il restera à exploiter la recherche du du rang pour obtenir une famille génératrice de $E_\lambda(A)$.

— On peut ensuite expliciter la matrice diagonale D qui est semblable alors à la matrice A dès lors que l'on a suffisamment d'arguments portant notamment sur la dimension des sous-espaces propres de A pour le faire, ainsi que donner la matrice de passage P permettant de diagonaliser A par la relation de semblablitude $A = PQP^{-1}$.

Éléments de correction

Matrice A

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, 16\}$

$A = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang de $A - 0\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_0(A))$

$$A - 0\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_0(A)) = 1$

Base de $E_0(A)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $A - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(A))$

$$A - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(A)) = 1$

Base de $E_1(A)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $A - 16\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{16}(A))$

$$A - 16\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -5 & -13 & -3 \\ 5 & -3 & -16 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{16}(A)) = 1$

Base de $E_{16}(A)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Matrice B

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(B) = \{1, 3, -4\}$

$B = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang de $B - 1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(B))$

$$B - 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(B)) = 1$

Base de $E_1(B)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $B - 3\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3(B))$

$$B - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_3(B)) = 1$

Base de $E_3(B)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $B+4\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{-4}(B))$

$$B + 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-4}(B)) = 1$

Base de $E_{-4}(B)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Matrice C

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(C) = \{3, 1, -1\}$

$C = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang de $C-3\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3(C))$

$$C - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_3(C)) = 1$

Base de $E_3(C)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $C-1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_1(C))$

$$C - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_1(C)) = 1$

Base de $E_1(C)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $C+1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_{-1}(C))$

$$C + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-1}(C)) = 1$

Base de $E_{-1}(C)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Matrice F

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(F) = \{-1, 2\}$

$F = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang de $F+1\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_3{-1}(F))$

$$F + 1\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_{-1}(F)) = 1$

Base de $E_{-1}(F)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Rang de $F-2\mathrm{I}_3$ | $\dim(E_2(F))$

$$F - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(E_2(F)) = 2$

Base de $E_2(F)$

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$