Exercice| [5120] | 1| Étude de l'inversibilité d'une matrice

Déterminer le(s) réel(s) m tel(s) que la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est inversible.

Le cas échéant, déterminer l'inverse de la matrice A en fonction de m.

Pistes de réflexion

- On cherchera une condition sur m à partir de la recherche du rang de A qui doit être dans ce cas égal 3 pour que A soit inversible.
- Sous réserve que m satisfasse les conditions précédemment déterminées, on cherchera l'inverse de A par un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$.

Éléments de correction

(1). On recherche de rang de A par échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, A est de rang 3 si, et seulement si $m-1 \neq 0$ et $-m^2-m+2 \neq 0$ ce qui revient à $m \notin \{1,2\}$.

(2). Sous l'hypothèse $m \notin \{1,2\}$, on recherche l'inverse de A par échelonnement réduit en lignes de la matrice $(A|\mathrm{I}_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 & 0 & -m \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & 1 & 1 & -1-m \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{-m^2-m+2} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - mL_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{m}{m^2+m-2} & \frac{m}{m^2+m-2} & -\frac{2}{m^2+m-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \end{array}\right)$$

et par suite : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} \\ -\frac{1}{m^2+m-2} & -\frac{1}{m^2+m-2} & \frac{m+1}{m^2+m-2} \end{pmatrix}.$$