Exercice| [5119] | 1| Inversibilité d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure

À quelle(s) condition(s) sur le réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & m^2-1 & 0\\ 0 & 0 & m-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & m^2-5m+6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-2 & 0\\ 0 & 0 & m^2-1\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On sait qu'une matrice diagonale ou triangulaire est inversible si, et seulement si, TOUS ses termes diagonaux sont non nuls.
- Il s'agit donc ici d'exhiber les termes diagonaux des matrices et d'en déduire des équations que doit ensuite satisfaire m pour que ces dernières soient inversibles.

Éléments de correction

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & m^2-1 & 0\\ 0 & 0 & m-1\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, donc par théorème, cette dernière est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls.
Ainsi, on doit avoir $m^2-1 \neq 0$ et $m-1 \neq 0$.
Par suite, la matrice est inversible si, et seulement si, $m \notin \{-1, 1\}$.

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & m^2-5m+6\end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, donc par théorème, cette dernière est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls.
Ainsi, on doit avoir $m^2-5m+6 \neq 0$.
Par suite, la matrice est inversible si, et seulement si, $m \notin \{2, 3\}$.

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-2 & 0\\ 0 & 0 & m^2-1\end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, donc par théorème, cette dernière est inversible si, et seulement si, tous ses termes diagonaux sont non nuls.
Ainsi, on doit avoir $m^2-1 \neq 0$ et $m-2 \neq 0$.
Par suite, la matrice est inversible si, et seulement si, $m \notin \{-1, 1, 2\}$.