Exercice| [5117] | 1| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer A^2 puis $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{I}_4 = (0)$.

(2). En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser la formule du binôme de Newton, en ayant au préalable calculé les premières puissances de A, ou on explicite tout simplement la matrice $A + \mathrm{I}_3$ dont on calcule ensuite le cube.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Donc : $A^2 = 3\mathrm{I}_4 + 2A$.

(2). On en déduit donc que : $A^2 - 2A = 3\mathrm{I}_4$

ce qui donne que $A \times \left(\frac{1}{3} A - \frac{2}{3} A \right) = \mathrm{I}_4$ et assure le caractère inversible à droite de A,

donc que A est inversible avec $A^{-1} = \frac{1}{3} A - \frac{2}{3} A$.