Exercice| [5116] | 1| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer la matrice $A\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right)$.

(2). La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra soit exprimer A^2 et la matrice $A - \mathrm{I}_3$ ou remarquer qu'il s'agit de calculer $A^3 - A$, mais cela demande de calculer A^3.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite $A^2 - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \end{array} \quad \text{Donc : } A\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right)^3 = 4\mathrm{I}_3.$$

(2). Puisque $A\left(A^2 - \mathrm{I}_3\right) = 4\mathrm{I}_3$, on en déduit que $A \times \left(\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$ ce qui assure le caractère inversible à droite de A, donc que A est inversible, et d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}\mathrm{I}_3$.