Exercice| [5115] | 1| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1). Calculer $(A + \mathrm{I}_3)^3$.

(2). La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser la formule du binôme de Newton, en ayant au préalable calculé les premières puissances de A, ou on explicite tout simplement la matrice $A + \mathrm{I}_3$ dont on calcule ensuite le cube.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Éléments de correction

(1). Il est immédiat que $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

et donc $(A + \mathrm{I}_3)^3 = (0)$.

(2). Puisque $A\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3 A$, on a d'après la formule du binôme de Newton que :

$$(A + \mathrm{I}_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + \mathrm{I}_3$$

Comme $(A + \mathrm{I}_3)^3 = (0)$, on en déduit que : $A^3 + 3A^2 + 3A = -\mathrm{I}_3$
et par suite que : $A\left(-A^2 - 3A - 3\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$
ce qui assure le caractère inversible de A à droite de A, donc que A est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = -A^2 - 3A - 3\mathrm{I}_3$$