Exercice| [5114] | 1| Puissance et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $A^3 = (0)$.

(2). En déduire la matrice A n'est pas inversible.

Pistes de réflexion

(1). On commence par déterminer A^2, puis on détermine A^3.

(2). On procède par un raisonnement par l'absurde en supposant que A est inversible jusqu'à écrire une relation fausse qui porte sur A^2.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

(2). Raisonnons par l'absurde, en supposant que A est inversible.
Puisque A^{-1} existe, en multipliant à gauche par A^{-1} la relation $A^3 = (0)$, on obtient que $A^{-1} \times A^3 = A^{-1} \times (0)$ ce qui donne $A^2 = (0)$.
Les calculs précédents montrent que $A^2 \neq (0)$, donc contradiction, et par suite A n'est pas inversible.