Exercice| [5113] | 1| Inverse par échelonnement d'une matrice augmentée

Compléter l'échelonnement suivant pour en déduire l'inversibilité et l'inverse de la matrice A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

— On effectue les opérations élémentaires indiquées jusqu'à obtenir l'inverse de la matrice A.

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$