## Exercice| [5111] | 1| Identifier des matrices non-inversibles

Aucune des matrices ci-dessous ne sont pas inversibles. Pourquoi ?

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&1&1\\4&0&2\\8&2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&1&-1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&1&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

## Pistes de réflexion

— On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à $n$.

— Certaines matrices ne sont clairement pas de rang $n$ car possèdent une ligne/colonne de zéros, ou une ligne/colonne est multiple ou combinaison linéaire triviale d'autres lignes/colonnes.

## Éléments de correction

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$
$L_3$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_2$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}4&1&1\\4&0&2\\8&2&2\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$L_3$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 + L_3$
$L_2$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$L_2$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2$
$L_3$ est nulle
donc le rang est au plus 2

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3 - L_1 + L_2$
$L_4$ est nulle
donc le rang est au plus 3

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1 - L_2 - L_3$
$L_4$ est nulle
donc le rang est au plus 3

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&1&-1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 + L_2$
$L_3$ est nulle
donc le rang est au plus 3

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3 + L_2 + L_1$
$L_4$ est nulle
donc le rang est au plus 3

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1 - L_2 - L_3$
$L_4$ est nulle
donc le rang est au plus 3

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&1&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2 - L_1$
$L_4$ est nulle
donc le rang est au plus 3