Exercice| [5110] | 1| Inversibilité et rang d'une matrice

Déterminer parmi les quatre matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 données ci-après, celles qui sont inversibles.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_1) = \dots$

☐ M_1 est inversible

☐ M_1 n'est pas inversible

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_2) = \dots$

☐ M_2 est inversible

☐ M_2 n'est pas inversible

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_3) = \dots$

☐ M_3 est inversible

☐ M_3 n'est pas inversible

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_4) = \dots$

☐ M_4 est inversible

☐ M_4 n'est pas inversible

Pistes de réflexion

- On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.
- Il s'agira ici d'exploiter les échelonnements proposés pour conclure en exhibant le rang de la matrice considérée.

Éléments de correction

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_1) = 3$

☒ M_1 est inversible

☐ M_1 n'est pas inversible

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_2) = 2$

☐ M_2 est inversible

☒ M_2 n'est pas inversible

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_3) = 4$

☒ M_3 est inversible

☐ M_3 n'est pas inversible

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L$$

$$\cdots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\,(M_4) = 3$

☐ M_4 est inversible

☒ M_4 n'est pas inversible