Exercice| [5109] | 1| Exploiter une relation matricielle

(1). La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $2A^2 = \mathrm{I}_n$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(2). La matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $B^3 = 2\mathrm{I}_n$. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(3). La matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $C + C^2 + C^3 = \mathrm{I}_n$. La matrice C est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(4). Les matrices P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que : $\left\{\begin{array}{rcl} PQ & = & QP \\ P^2 - Q^2 & = & \mathrm{I}_n \end{array}\right.$. La matrice $P + Q$ est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par A sous la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(2). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par B sous la forme $B \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(3). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par C sous la forme $C \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(4). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par P et Q sous la forme $(P + Q) \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

Éléments de correction

(1). On en déduit que $A \times (2A) = \mathrm{I}_n$ donc A est inversible à droite, donc inversible avec $A^{-1} = 2A$.

(2). On en dd́eduit que $B \times \left(\frac{1}{2}B^2\right) = \mathrm{I}_n$, donc B est inversible à droite, donc inversible avec $B^{-1} = \frac{1}{2}B^2$.

(3). On en déduit que $C \times \left(\mathrm{I}_n + C + C^2\right) = \mathrm{I}_3$, donc C est inversible à droite, donc inversible avec $C^{-1} = \mathrm{I}_n + C + C^2$.

(4). Puisque $PQ = QP$, on a :
$$\begin{array}{rcl} (P+Q)(P-Q) & = & P^2 - PQ + QP - Q^2 \\ & = & P^2 - Q^2 \\ & = & \mathrm{I}_n \end{array}$$
donc $P + Q$ est inversible à droite, donc inversible avec $(P+Q)^{-1} = P - Q$.