Exercice| [5108] | 1| Inverse d'une matrice

Effectuer les produits matriciels ci-dessous pour en déduire les inverses des matrices données.

$$\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}} \qquad A = \begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}-3&1\\-2&-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1&-1\\2&-3\end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}} \qquad A = \begin{pmatrix}-3&1\\-2&-1\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&-3\\1&2&1\end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}} \qquad A = \begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&-2\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}} \qquad A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\phantom{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}}$$

Pistes de réflexion

— En notant P et Q les deux matrices et considérant que l'on fait le produit $P \times Q$, chaque calcul devrait conduire à une relation de la forme $PQ = \lambda \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ce qui assure de l'inversibilité de P car possède un inverse à droite, et de l'inversibilité de Q car possède un inverse à gauche.

— Il reste alors à écrire la relation $PQ = \lambda \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ sous la forme $P \times \left(\frac{1}{\lambda} Q\right) = \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ ou $\left(\frac{1}{\lambda} P\right) \times Q = \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ pour obtenir l'inverse souhaité.

Éléments de correction

$$\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}} \qquad A = \begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-1&1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}-3&1\\-2&-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1&-1\\2&-3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}} \qquad A = \begin{pmatrix}-3&1\\-2&-1\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&-3\\1&2&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}} \qquad A = \begin{pmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0&-2\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}} \qquad A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}}$$