

Exercice [5082] | 1 | Contre-exemple(s)

(1). On considère les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a). Calculer $D = A + B$.

(b). Calculer $E = AC$.

(c). Comparer les matrices DC et $E + BC$. Qu'en conclure ?

(2). On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a). Calculer $D = AB$.

(b). Calculer $E = BC$.

(c). Comparer les matrices DC et AE . Qu'en conclure ?

(2). (a). Un calcul direct donne que : $D = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$

(b). Un calcul direct donne que : $E = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c). Un calcul direct donne que : $DC = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \end{pmatrix}$

et un autre calcul direct donne que : $E = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que $DC = AE$, ce qui est normal puisque :

$$\begin{aligned} DC &= ABC \\ &= A(BC) \\ &= AE \end{aligned}$$

Pistes de réflexion

(1). (a). Il s'agit d'une addition de matrices, donc on opère coefficients à coefficients.

(b). Il s'agit d'un produit de matrices... donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(c). On observera que les deux matrices sont égales ou... différentes.

(2). (a). Il s'agit d'un produit de matrices... donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(b). Il s'agit d'un produit de matrices... donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(c). On observera que les deux matrices sont égales ou... différentes.

Éléments de correction

(1). (a). Un calcul direct donne que : $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

(b). Un calcul direct donne que : $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & -6 & -3 & 9 \\ 4 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

(c). Un calcul direct donne que : $DC = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -2 & 2 \\ 18 & 2 & -5 & 11 \\ 26 & 9 & -6 & 11 \end{pmatrix}$

et un autre calcul direct donne que : $E + BC = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -2 & 2 \\ 18 & 2 & -5 & 11 \\ 26 & 9 & -6 & 11 \end{pmatrix}$

On en déduit donc que $DC = E + BC$ ce qui est normal puisque :

$$\begin{aligned} DC &= (A + B)C \\ &= AC + BC \\ &= E + BC \end{aligned}$$