Exercice| [0508] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Montrer que le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pistes de réflexion

— On montrera que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ en mobilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels par stabilité par combinaison linéaire.

Éléments de correction

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$: c'est effectivement le cas par définition de F.

$\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ **appartient à F :** en effet, il est immédiat que $0+0-0=0$ et $0-0-0=0$, et donc que $\overrightarrow{0} \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $u=(x,y,z) \in F$, $v=(x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'', y'', z'')$.

Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x''+y''-z''=0$ et $x''-y''-z''=0$.

Par définition de w, on a les relations : $\begin{cases} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \end{cases}$.

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} x''+y''-z'' &= (\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x+y-z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x'+y'-z'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et sur le même principe, on a :

$$\begin{aligned} x''-y''-z'' &= (\lambda x + x') - (\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x-y-z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x'y'-z'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui assure que $w \in F$.

Concusion : F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.