Exercice| [5072] | 1| Convergence de suites de matrices | HEC 2011 Filière ECS

Pour tout couple (p,q) d'entiers de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}()$ (resp. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels (resp. complexes) et $\mathcal{M}_p()$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$) cet ensemble lorsque $q=p$.
On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
Dans tout le problème :

- pour tout p de $\mathbb{N}^*$, on identifie les espaces vectoriels $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, c'est à dire que l'on identifie tout élément de $\mathbb{C}^p$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$;
- on note A la transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $|z|$ le module d'un nombre complexe z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et on admet que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite $0 \quad \Leftrightarrow$ la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0 ;
- pour toute matrice $A=(a_{k,j})_{1\leq k,j\leq p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note (A) l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et on pose : $\rho(A) = \max_{\lambda\in(A)}|\lambda|$ et $N(A) = \max_{1\leq k\leq p}\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}|$;
- le vecteur nul de $\mathbb{C}^p$ est noté 0. si $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_p\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de ^{p} ; on note $X<Y$ (resp $X\leqslant Y$) si pour tout k de $[\![1;p ona$:$x_k<y_k$ (resp. $x_k\leqslant y_k$). En particulier, si les coordonnées de X sont toutes positives (resp. strictement positives), on note $X\geqslant 0$ (resp. X>0) ;
- pour tout vecteur V de $\mathbb{C}^p$, on note $|V|$ le vecteur de ^{p} dont les coordonnées sont les modules de celles de V.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p()$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = (m_{k,j}(n))_{1\leqslant k,j\leqslant p}$. On dit que la suite des matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $M=(m_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p()$, si pour tout couple (k,j) de $[\![1;p^2 ona \lim_n m_{k,j}(n) = m_{k,j}$; on note alors $\lim_n M_n = M$.
On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p()$ convergeant respectivement vers des matrices A et B, alors la suite $(A_n+B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice $A+B$, la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice AB et, pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice αA.
Une matrice $A=(a_{k,j})_{1\leq k,j\leq p}$ de $\mathcal{M}_p()$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si pour tout couple (k,j) de $[\![1;p^2 ona$:$a_{k,j}\geqslant 0$ (resp. $a_{k,j}>0$).
Le problème a pour objet l'étude des relations entre les valeurs propres de module maximal d'une matrice et la limite éventuelle de la suite des puissances entières de cette matrice. Ces relations, appliquées aux matrices positives et strictement positives, interviennent notamment dans la théorie des processus markoviens et dans les questions relatives à l'existence et la stabilité de l'équilibre général d'une économie.
Deux exemples

Exemple 1. Soit A et J les matrices de $\mathcal{M}_3()$ définies par $A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
Calculer J^2 et déterminer les valeurs propres de J. Exprimer A en fonction de I_3 et J, et en déduire (A) et $\rho(A)$. Exprimer pout tout n de $\mathbb{N}^*$, A^n en fonction de I_3, J et n. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $N(A^n)$. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice M que l'on explicitera et dont on précisera le rang.
Montrer que M est la matrice d'un projecteur de ^{3}.

Exemple 2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1+i&1\\ 0&0&1-i\end{pmatrix}$.
Déterminer (A). Justifier que A est diagonalisable. Calculer $N(A)$ et $\rho(A)$. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A. Expliciter pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la matrice A^n. Comparer $\rho(A^n)$ et $(\rho(A))^n$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $N(A^n)=2^{\frac{n}{2}}(1+|\sin(n\pi/4)|)$. Comparer $\lim_n(N(A^n))^{1/n}$ et $\rho(A)$.
Un critère de convergence vers la matrice nulle
Dans cette partie, on note $A=(a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p()$, λ une valeur propre **complexe** de A et $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_p\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^p$ un vecteur propre de A associée à λ.
Soit k_0 un entier de
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et μ une valeur propre de A^n telle que $|\mu|=\rho(A^n)$. Montrer que λ^n est une valeur propre de A^n. En déduire l'inégalité ; $\rho(A^n)\geqslant(\rho(A))^n$. Soit $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ les n racines n-ièmes de μ. Etablire l'égalité $A^n-\mu I_p=\prod_{j=0}^{n-1}(A-\alpha_j I_p)$ Montrer qu'il existe un entier j_0 de
On suppose que la suite des matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p()$.
Montrer que $\lim N(A^n)=0$. En déduire que $\rho(A)<1$.
Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
On pose pour tout réel ε strictement positif : $A_\varepsilon=\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$. Montrer que si $\rho(A)<1$, alors la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p()$. Montrer que $\rho(A_\varepsilon)<1$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n\geqslant n_0$, on a : $N(A_\varepsilon^n)\leqslant 1$. ablir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation : $N(A^n)=(\rho(A)+\varepsilon)^nN(A_\varepsilon^n)$. A l'aide des questions précédentes, établir pour tout $n\geqslant n_0$, l'encadrement : $0\leqslant(N(A^n))^{1/n}-\rho(A)\leq\varepsilon$.
En déduire que l'on a : $\lim_n(N(A^n))^{1/n}=\rho(A)$.
Dans la suite du problème, on admet que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p()$, on a $\lim_n(N(A^n))^{1/n}=\rho(A)$. et que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p()$ $\Leftrightarrow$ on a $\rho(A)<1$.
Matrices positives - Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A
Dans cette partie, on considère une matrice $A=(a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p()$ positive et non nulle.
Soit $B=(b_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_p()$ vérifiant pour tout couple (k,j) de $[\![1;p^2 : b_{k,j}\leq a_{k,j}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* ona$N(B^n) $\leqslant N(A^n)$. En déduire l'inégalité $\rho(B)\leqslant\rho(A)$.

On suppose dans cette question qu'il existe une constante s vérifiant pour tout k de
On pose : $\sigma=\min_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{j=1}^{p}a_{k,j}$. A l'aide des questions 7 et 8, établir l'encadrement : $\sigma\leqslant\rho(A)\leqslant N(A)$.
Soit X un vecteur de ^{p} tel que $X>0$ et soit Δ_X la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p()$ dont les éléments diagonaux sont les coordonnées $x_1,x_2,\ldots,x_p$ de X. Après avoir justifié l'existence de l'inverse Δ_X^{-1} de Δ_X, calculer la matrice $\Delta_X^{-1}A\Delta_X$. ablir l'encadrement : $\min_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{1}{x_k}\sum_{j=1}^{p}a_{k,j}x_j\leqslant\rho(A)\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant p}\frac{1}{x_k}\sum_{j=1}^{p}a_{k,j}x_j$ En déduire que s'il existe un réel positif β vérifiant $\beta X<AX$, il vérifie également $\beta<\rho(A)$.
Matrices strictement positives
*Dans cette partie, la matrice $A=(a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p()$ est strictement positive, λ est une valeur propre **complexe** de A telle que $|\lambda|=\rho(A)$, et $X\in\mathbb{C}^p$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*
Montrer que $\rho(A)>0$. ablir la relation : $|AX|\leqslant A|X|$. En déduire que l'on a : $\rho(A)|X|\leq A|X|$.
On pose : $Z=A|X|$. Montrer que $Z>0$. On pose : $Y=A|X|-\rho(A)|X|$ et on suppose $Y\neq 0$. ablir les relations : $AY>0$ et $\rho(A)Z<AZ$. En déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que $|X|$ est un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$.
On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls et vérifiant $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

On pose : $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$,avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$. Montrer que $\theta_1 = \theta_2$. On considère p nombres complexes ($p \geqslant 2$) $z_1, z_2, \ldots, z_p$ tous non nuls et vérifiant $\left|\sum_{j=1}^p z_j\right| = \sum_{j=1}^p |z_j|$.
ablir l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ vérifiant pour tout j de
Montrer que $|X| > 0$ et que $|AX| = A|X|$. En déduire l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ tel que $X = |X|e^{i\theta}$.
Montrer que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal. On suppose qu'il existe deux vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ de la matrice A associés à la valeur propre $\rho(A)$, linéairement indépendants.
En considérant le vecteur $u_1V - v_1U$, aboutir à une contradiction. En déduire la dimension du sous-espace propre associé à $\rho(A)$.
Montrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres. Soit Z un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A)$. Justifier que les coordonnées de Z sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives. Soit U un vecteur propre de A vérifiant $U > 0$, associé à la valeur propre $\rho(A)$. On pose : $Y = \frac{1}{{}^tUZ}$.
ablir les relations suivantes : $Y > 0, {}^tAY = \rho(A)Y$ et ${}^tYU = 1$.
Soit M la matrice de $\mathcal{M}_p()$ définie par $M = U{}^tY$, où U a été définie dans la question $15.c$).
Montrer que M est la matrice d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau. ablir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$.
Soit μ une valeur propre non nulle de $(A - \rho(A)M)$ et W un vecteur propre de $(A - \rho(A)M)$ associé à μ. Montrer que $MW = 0$. En déduire que μ est également une valeure propre de A et que $|\mu| \leqslant \rho(A)$. En raisonnant par l'absurde et en utilisant la question $14.a$), montrer que $|\mu| < \rho(A)$. Déduire des résultats précédents que $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$ et que $\lim_n \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M$
Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé
On munit l'espace vectoriel ^{p} du produit scalaire canonique. On note $\| \|$ la norme euclidienne associée.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p()$ strictement positive, symétrique, admettant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p|$. Soit V_0 un vecteur de ^{p} tel que $V_0 > 0$.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de ^{p} formée de vecteurs propres de A tels que pour tout k de $[\![1;p\,Ae_k = \lambda_k e_k$.
On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de ^{p} converge vers un vecteur L de ^{p} si $\lim_n \|X_n - L\| = 0$, et on note : $\lim_n X_n = L$.
On définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de ^{p} par : V_0, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.
Soit $V_0 = \sum_{k=1}^p s_k e_k$, la décomposition de V_0 dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Montrer que $s_1 \neq 0$.
ablir la relation : $\lim_n \frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1$. Déterminer $\lim_n \frac{V_n}{\|V_n\|}$ (on distinguera deux cas suivant le signe de s_1).
On suppose déjà définis en Pascal les objets suivants :

```
Const p=...
Type vecteur=array[1..p] of real;
     matrice=array[1..p,1..p] of real;
```

ainsi que les fonctions et procédures suivantes :
`Function norme(V: vecteur): real;` (calcul de la norme du vecteur V)
`Procedure prodmat(A: matrice; V: vecteur; var W: vecteur);` ($W = AV$)
`Procedure affecte(V: vecteur; var W: vecteur);` (W prend la valeur V)
rire une procédure d'en-tête `puissance(A: matrice; n:integer; V0: vecteur; var V: vecteur)` qui calcule pour tout entier naturel n non nul, le vecteur V_n défini ci-dessus.
rire une procédure d'en-tête `vectpropre(A: matrice; n: integer; V0: vecteur; var V: vecteur)` qui calcule la valeur approchée d'un vecteur propre associé à λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée, et une fonction d'en-tête `valpropre(A: matrice; n: integer; V0: vecteur): real` qui calcule la valeur approchée de λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée.
On expliquera les différentes étapes des procédures proposées.

Éléments de correction

[pb] **Partie I.**

(1). Exemple 1.

a) $\boxed{J^2 = 3J}$.

On en déduit que $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de $\dot{J}$. Comme $Sp\,(J)$ est inclus dans l'ensemble des racines de $X^2 - 3X$, on en déduit que les valeurs propres possibles de J sont 0 et 3.

Or $J\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls, donc 0 et 3 sont valeurs propres de J.

Conclusion : $\boxed{Sp\,(J) = \{0, 3\}}$.

b) $\boxed{A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I}$, donc $A - \lambda I = \frac{1}{2}J - \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) I = \frac{1}{2}\left(J - (1 + 2\lambda)\, I\right)$.

$[\,\lambda$ est valeur propre de $A\,] \Leftrightarrow [\,A - \lambda I$ non inversible $] \Leftrightarrow [\,1 + 2\lambda$ est valeur propre de $J\,] \Leftrightarrow [\,2\lambda + 1 = 0$ ou $2\lambda + 1 = 3\,]$

Donc $\boxed{Sp\,(A) = \{-\frac{1}{2}, 1\} \text{ et } \rho\,(A) = 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J^k = 3^{k-1}J$ et on a $J^0 = I$. $\quad (*)$

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{2^n}(J - I)^n \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k} J^k \quad [\text{Newton car } J \text{ et } -I \text{ commutent}] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[(-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k} 3^{k-1} J\right] \quad [\text{ d'après } (*)] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[(-1)^n I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k} 3^k J - (-1)^n J\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[(-1)^n I + \frac{1}{3}\left[(-1+3)^n - (-1)^n\right] J\right]
\end{aligned}$$

Donc, par Newton,

$$\boxed{A^n = \left[\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n I + \tfrac{1}{3}\left(1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right) J\right]}.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $\beta_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

On en déduit que, $\forall k \in [\![1, 3]\!]$ $\sum_{j=1}^3 |a_{k,j}(n)| = |\alpha_n| + 2|\beta_n| = [|\frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)| + 2|\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)|]$

Or $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leqslant \frac{1}{2}$ car $n \geqslant 1$, donc $1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$ et $1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$,

donc $\forall k \in [\![1, 3]\!]$ $\sum_{j=1}^3 |a_{k,j}(n)| = \left[\frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] = 1$

Donc $\boxed{N\,(A^n) = 1}$.

d) Or $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = \dfrac{1}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = \dfrac{1}{3}$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \dfrac{1}{3}J}$. Donc $M = \frac{1}{3}J$, et $\boxed{rg(M) = rg(J) = 1}$.

De plus, $M^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{9}3J = M$ donc $\boxed{M \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3}$.

(2). a) A est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, donc $\boxed{Sp(A) = \{1, 1+i, 1-i\}}$.

A admet 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

$|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, donc $N(A) = \max(1, 1+|1+i|, |1-i|)$,

donc $\boxed{N(A) = 1+\sqrt{2} \text{ et } \rho(A) = \sqrt{2}}$.

b) Dans toute la suite, on notera, pour λ valeur propre de A, $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ le sous-espace propre associé à λ.

On pose $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $AC_1 = C_1$ avec $C_1 \neq 0$ et $AC_2 = (1+i)C_2$ avec $C_2 \neq 0$,

donc C_1 est un vecteur propre associé à 1 et C_2 est un vecteur propre associé à $1+i$.

Or A admet 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

Donc $E_1(A) = Vect(C_1)$ et $E_{1+i}(A) = Vect(C_2)$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} x = (1-i)x \\ (1+i)y + z = (1-i)y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -2iy \end{array}\right.$.

Donc $E_{1-i} = Vect(C_3)$ où $C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

Comme A est diagonalisable, on a $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus E_{1+i}(A) \oplus E_{1-i}(A)$. $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ est obtenue en juxtaposant une base de chacun des sous-espaces propres, d'où $\boxed{\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \text{ formée de vecteurs propres de } A}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathcal{C}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$.

Le théorème de changement de bases donne $A = PDP^{-1}$, où $D = diag(1, 1+i, 1-i)$.

P est une matrice de passage, donc P est inversible. Par Gauss, on transforme simultanément P et I, en effectuant à la première étape l'opération $L_2 \leftarrow 2iL_2 + L_3$, et à la deuxième étape $L_2 \leftarrow \frac{1}{2i}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2i}L_3$. Par ces opérations, P est transformée en I et I est transformée en P^{-1}. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$.

Enfin, on pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_k$: "$A^k = PD^kP^{-1}$".

On a déjà vu que le rang 1 était vérifié.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ vraie. Alors $A^{k+1} = A^kA \underset{\text{par } \mathcal{H}_k}{=} PD^kP^{-1}A \underset{\text{par } \mathcal{H}_1}{=} PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vérifiée.

Donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$.

Après calculs, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & \frac{1}{2i}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}}$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^n) = \max(1, |1+i|^n, |1-i|^n) = \left(\sqrt{2}\right)^n$ et $[\rho(A)]^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \rho(A^n) = [\rho(A)]^n}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N(A^n) = \max\left(1, |1+i|^n + \frac{1}{|2i|}\left|(1+i)^n - (1-i)^n\right|, |1-i|^n\right)$.

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $(1+i)^n - (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left[e^{i\frac{n\pi}{4}} - e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right] = \left(\sqrt{2}\right)^n \times 2i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, donc $N(A^n) = \max\left(1, \left(\sqrt{2}\right)^n\left[1 + \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|\right], \left(\sqrt{2}\right)^n\right)$.

Donc $\boxed{N(A^n) = 2^{\frac{n}{2}}\left[1 + \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|\right]}$.

On en déduit que $[N(A^n)]^{1/n} = \sqrt{2}\left[1 + \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|\right]^{1/n} = \sqrt{2}\mathrm{e}\left[\frac{1}{n}\ln\left(1 + \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|\right)\right]$.

On pose $\gamma_n = \ln\left(1 + \left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right|\right)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \gamma_n \leqslant \ln 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(1 + \left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right|\right) = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}[N(A^n)]^{1/n} = \sqrt{2}}$, par continuité de l'exponentielle en 0.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}[N(A^n)]^{1/n} = \rho(A)}$.

Partie II.

(3). $AX = \lambda X$, donc, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j = \lambda x_k$.

Pour $k = k_0$, on obtient alors : $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k_0,j}x_j = \lambda x_{k_0}$. Donc, par l'inégalité triangulaire, $|\lambda|\left|x_{k_0}\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p}\left|a_{k_0,j}\right||x_j|$.

Or $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $|x_j| \leqslant \left|x_{k_0}\right|$, donc puisque les $\left|a_{k_0,j}\right|$ sont positifs, $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\left|a_{k_0,j}\right||x_j| \leqslant \left|a_{k_0,j}\right|\left|x_{k_0}\right|$,

et en sommant, $\sum\limits_{j=1}^{p}\left|a_{k_0,j}\right||x_j| \leqslant \left[\sum\limits_{j=1}^{p}\left|a_{k_0,j}\right|\right]\left|x_{k_0}\right|$.

Donc, $|\lambda|\,|x_{k_0}| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{p}|a_{k_0,j}|\right]|x_{k_0}|$ et comme $|x_{k_0}| > 0$, $\boxed{|\lambda| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{p}|a_{k_0,j}|\right] \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}| = N(A)}$.

On a donc clairement $0 \leqslant \max_{\lambda\in Sp(A)}|\lambda| \leqslant N(A)$, et $\boxed{0 \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)}$.

(4). a) On prouve par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ A^nX = \lambda^nX$.
Comme X est non nul (c'est un vecteur propre de A), on a bien $\boxed{\lambda^n \text{ est une valeur propre de } A^n}$.
Pour toute valeur propre λ de A, on a donc $|\lambda^n| \leqslant \rho(A^n)$, ou encore $|\lambda|^n \leqslant \rho(A^n)$.
C'est encore vrai pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$,
donc $\boxed{\rho(A)^n \leqslant \rho(A^n)}$.

b) On suppose de plus dans cette question que $\mu \neq 0$. On pose $P(X) = X^n - \mu$.
Soit $x\in\mathbb{C}$. [x est racine de P] $\Leftrightarrow$ [$x^n = \mu$] $\Leftrightarrow$ [$\exists i\in[\![0,n-1]\!]\quad x = \alpha_i$]
Or les $\alpha_i, 0\leqslant i\leqslant n-1$ sont deux à deux distincts, P est unitaire et $\deg(P) = n$, donc on a trouvé toutes les racines de P et elles sont simples.

Donc $P(X) = \prod_{j=0}^{n-1}(X-\alpha_j)$.

Donc $P(A) = \prod_{j=0}^{n-1}(A-\alpha_jI_p)$, c'est-à-dire $\boxed{A^n - \mu I_p = \prod_{j=0}^{n-1}(A-\alpha_jI_p)}$.

c) Supposons que $\forall j\in[\![0,n-1]\!]$, α_j ne soit pas valeur propre de A.

Alors $\forall j\in[\![0,n-1]\!]$, $A-\alpha_jI_p$ est inversible, donc $\prod_{j=0}^{n-1}(A-\alpha_jI_p)$ est inversible, donc $A^n - \mu I_p$ est inversible, et on aboutit à une contradiction, puisque μ est une valeur propre de A^n.
Donc, $\boxed{\exists j_0\in[\![0,n-1]\!]\quad \alpha_{j_0} \text{ est une valeur propre de } A}$.

d) $|\alpha_{j_0}| \leqslant \rho(A)$ par définition. Or $\mu = \alpha_{j_0}^n$, donc $|\alpha_{j_0}|^n = |\mu|$, donc $|\alpha_{j_0}| = |\mu|^{1/n} = (\rho(A^n))^{1/n}$,
donc $(\rho(A^n))^{1/n} \leqslant \rho(A)$.
La fonction $x\mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit $\rho(A^n) \leqslant (\rho(A))^n$. On déduit de $4.a)$ que $\boxed{\rho(A^n) = (\rho(A))^n}$.

On a vu à la question 3. que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $0\leqslant\rho(A)\leqslant N(A)$, donc en appliquant ce résultat à A^n, on a :
$0\leqslant \rho(A^n) \leqslant N(A^n)$. Comme $x\mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $0 \leqslant (\rho(A^n))^{1/n} \leqslant (N(A^n))^{1/n}$,
donc $\boxed{0\leqslant\rho(A)\leqslant (N(A^n))^{1/n}}$

(5). $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant N(A^n) = \max_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}(n)| \leqslant \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}(n)|$.
Or $\forall(k,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\lim_{n\to+\infty}|a_{k,j}(n)| = 0$ puisque $\lim_{n\to+\infty}A^n = 0$, donc puisque le nombre de termes de la somme ne dépend pas de n, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}(n)| = 0$.

En utilisant le théorème d'encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}N(A^n) = 0}$.
Or $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ 0\leqslant(\rho(A))^n \leqslant N(A^n)$ par la question $4.d)$, donc à nouveau par le théorème d'encadrement,
$\lim_{n\to+\infty}\rho(A)^n = 0$.
Avec les résultats sur les suites géométriques, on en déduit que $|\rho(A)| < 1$. Comme $\rho(A)\geqslant 0$, on a donc $\boxed{\rho(A) < 1}$.

(6). a) On suppose dans cette question que $\rho(A) < 1$.
A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, donc $\exists P\in Gl_p(\mathbb{C})$, $A = PDP^{-1}$, où $D = diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ A^n = PD^nP^{-1}$, et $D^n = diag(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\ldots,\lambda_p^n)$.
Or, pour $j\in[\![1,p]\!]$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant|\lambda_j|^n\leqslant\rho(A)^n$ et $\lim_{n\to+\infty}\rho(A)^n = 0$ car $0\leqslant\rho(A)<1$. Donc par encadrement, $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty}|\lambda_j|^n = 0$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}D^n = 0$, et avec les propriétés de l'énoncé sur la limite d'un produit de matrices, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}A^n = 0}$.

b) Avec les mêmes notations qu'au $a)$, on a $A_\varepsilon = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}D = diag\left(\frac{\lambda_1}{\rho(A)+\varepsilon},\frac{\lambda_2}{\rho(A)+\varepsilon},\ldots,\frac{\lambda_p}{\rho(A)+\varepsilon}\right)$.
Les valeurs propres de A_ε sont les $\frac{\lambda_j}{\rho(A)+\varepsilon}, j\in[\![1,p]\!]$, donc $\rho(A_\varepsilon) = \max_{j\in[\![1,p]\!]}\frac{|\lambda_j|}{\rho(A)+\varepsilon} = \frac{\max_{j\in[\![1,p]\!]}|\lambda_j|}{\rho(A)+\varepsilon} = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$ car $\varepsilon > 0$.
Donc $\boxed{\rho(A_\varepsilon) < 1}$.
D'après $6.a)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(A_\varepsilon)^n = 0$, puis d'après la question 5. que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}N(A_\varepsilon^n) = 0}$.
Par définition de la limite, on a $\forall\alpha>0,\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall n\geqslant n_0,\ \ |N(A_\varepsilon^n)|\leqslant\alpha$.
En prenant $\alpha = 1$, on a bien $\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall n\geqslant n_0,\ \ N(A_\varepsilon^n)\leqslant 1}$.
c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $A = (\rho(A)+\varepsilon)A_\varepsilon$, donc $A^n = (\rho(A)+\varepsilon)^nA_\varepsilon^n$.
On pose alors, pour $(k,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $A^n = (a_{k,j}(n))_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A_\varepsilon^n = (b_{k,j}(n))_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant p}}$.
On a pour $(k,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $a_{k,j}(n) = (\rho(A)+\varepsilon)^nb_{k,j}(n)$.
Donc, pour $k\in[\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p}|a_{k,j}(n)| = (\rho(A)+\varepsilon)^n\sum_{j=1}^{p}|b_{k,j}(n)|$ car $\rho(A)+\varepsilon>0$,
donc $\boxed{N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^nN(A_\varepsilon^n)}$.
d) Avec $6.b)$ et $6.c)$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^nN(A_\varepsilon^n)\leqslant(\rho(A)+\varepsilon)^n$ car $N(A_\varepsilon^n)\leqslant 1$.
Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall n\geqslant n_0,\ \ (N(A^n))^{1/n}\leqslant(\rho(A)+\varepsilon)$ car la fonction $x\mapsto x^{1/n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Comme, par la question $4.d)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (N(A^n))^{1/n}-\rho(A)\geqslant 0$, on en déduit :
$\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall n\geqslant n_0,\ \ 0\leqslant(N(A^n))^{1/n}-\rho(A)\leqslant\varepsilon}$. Donc $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $\left|(N(A^n))^{1/n}-\rho(A)\right|\leqslant\varepsilon$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, la définition de la limite donne : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(N(A^n))^{1/n} = \rho(A)}$.

Partie III.

(7). On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{H}_n$: "$\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ 0 \leqslant b_{k,j}(n) \leqslant a_{k,j}(n)$".

$\mathcal{H}_1$ est vérifiée par hypothèse ;

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

Alors pour $(k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \ b_{k,j}(n+1) = \sum\limits_{l=1}^{p} b_{k,l}(n)\, b_{l,j}$.

Or, pour $(k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, pour $l \in [\![1,p]\!]$, $0 \leqslant b_{k,l}(n) \leqslant a_{k,l}(n)$ (par $\mathcal{H}_n$) et $0 \leqslant b_{l,j} \leqslant a_{l,j}$ (par hypothèse).

En multipliant membre à membre des inégalités positives,

on a $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2, \forall l \in [\![1,p]\!],\ 0 \leqslant b_{k,l}(n)\, b_{l,j} \leqslant a_{k,l}(n)\, a_{l,j}$,

et, en sommant, $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ 0 \leqslant b_{k,j}(n+1) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{p} a_{k,l}(n)\, a_{l,j} = a_{k,j}(n+1)$, et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \ 0 \leqslant b_{k,j}(n) \leqslant a_{k,j}(n)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \left|b_{k,j}(n)\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} b_{k,j}(n) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}(n) = \sum\limits_{j=1}^{p} \left|a_{k,j}(n)\right|$,

donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \left|b_{k,j}(n)\right| \leqslant \max_{k\in[\![1,p]\!]} \sum\limits_{j=1}^{p} \left|a_{k,j}(n)\right| \leqslant N(A^n)$, donc $\max_{k\in[\![1,p]\!]} \sum\limits_{j=1}^{p} \left|b_{k,j}(n)\right| \leqslant N(A^n)$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ N(B^n) \leqslant N(A^n)}$.

Toujours par la croissance sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto x^{1/n}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(N(B^n))^{1/n} \leqslant (N(A^n))^{1/n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (N(B^n))^{1/n} = \rho(B)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$, on peut passer à la limite dans l'inégalité précédente et on a $\boxed{\rho(B) \leqslant \rho(A)}$.

(8). On a donc $N(A) = s$, puisque les coefficients de A sont positifs.

De plus, en notant $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AZ = sZ$ et $Z \neq 0$, donc s valeur propre de A.

Donc $s = |s| \leqslant \rho(A) \underset{\text{par } 3.}{\leqslant} N(A) = s$, donc $\boxed{\rho(A) = s}$.

(9). On sait déjà que $\rho(A) \leqslant N(A)$.

Si $\sigma = 0$, l'inégalité est claire. On suppose maintenant $\sigma > 0$, et on pose, pour $k \in [\![1,p]\!]$, $\sigma_k = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}$.

On a donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sigma \leqslant \sigma_k$.

Posons alors $B = (b_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ avec pour $(k,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $b_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k} a_{k,j}$. On a $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ 0 \leqslant b_{k,j} \leqslant a_{k,j}$.

Par la question 7., on en déduit que $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

Or B est une matrice positive non nulle qui vérifie $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} = \sigma$, donc par la question 8., $\rho(B) = \sigma$.

Donc $\boxed{\sigma \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)}$.

(10). a) Δ_X est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $x_k, 1 \leqslant k \leqslant p$, sont strictement positifs, donc non nuls, donc $\boxed{\Delta_X \text{ est inversible}}$.

$A\Delta_X = (a_{k,j} x_j)_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ et $\boxed{\Delta_X^{-1} A \Delta_X = \left(a_{k,j} \frac{x_j}{x_k}\right)_{1\leqslant k,j\leqslant p}}$.

b) $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$ est une matrice positive et non nulle d'après l'expression de la question 10.a)

et d'après la question 9., $\min_{1\leqslant k\leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} \left|a_{k,j} \frac{x_j}{x_k}\right| \leqslant \rho\left(\Delta_X^{-1} A \Delta_X\right) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} \left|a_{k,j} \frac{x_j}{x_k}\right|$.

A et $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$ sont semblables, donc ont même valeurs propres donc $\rho(A) = \rho\left(\Delta_X^{-1} A \Delta_X\right)$.

Comme A est une matrice positive et $X > 0$, on en déduit :

$\boxed{\min_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j}$.

c) Supposons qu'il existe $\beta \geqslant 0$ tel que $\beta X < AX$.

Par définition, on a pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\beta x_k < \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$, donc pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\beta < \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$.

D'où $\beta < \min_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j$, donc $\boxed{\beta < \rho(A)}$.

Partie IV.

(11). a) $A > 0$ donc A est une matrice positive non nulle, et par la question 9., $\rho(A) \geqslant \sigma = \min_{1\leqslant k\leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}$..

Comme $\forall (k,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{k,j} > 0$, on a $\sigma > 0$, donc $\boxed{\rho(A) > 0}$.

b) $|AX| = \left(\left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j\right|\right)_{1\leqslant k\leqslant p}$. et $A|X| = \left(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j|\right)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

Or, $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j\right| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leqslant} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{k,j}|\,|x_j| \underset{a_{k,j}>0}{\leqslant} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j|$, donc $\boxed{|AX| \leqslant A|X|}$.

De plus, X est un vecteur propre associé à λ, donc $|AX| = |\lambda X| = (|\lambda x_k|)_{1\leqslant k\leqslant p} = |\lambda| (|x_k|)_{1\leqslant k\leqslant p} = |\lambda|\,|X| = \rho(A)\,|X|$.

Donc $\boxed{\rho(A)\,|X| \leqslant A\,|X|}$.

c) $Z = \left(\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j|\right)_{1\leqslant k\leqslant p}$. X est un vecteur propre donc est non nul, donc $\exists j_0 \in [\![1,p]\!]\,,\ x_{j_0} \neq 0$,donc $\exists j_0 \in [\![1,p]\!]\,,\ |x_{j_0}| > 0$

Or $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}\,|x_j| = \underbrace{a_{k,j_0}\,|x_{j_0}|}_{>0} + \underbrace{\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{p} a_{k,j}\,|x_j|}_{\geq 0}$ car les coefficients de A sont strictement positifs.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}\,|x_j| > 0$ et $\boxed{Z > 0}$.

d) Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$. $Y \neq 0$ par hypothèse et $Y \geqslant 0$, donc $\exists j_0 \in [\![1,p]\!]\,,\ y_{j_0} > 0$.

Avec la même démonstration qu'à la question précédente, en remplaçant x_j par y_j, on trouve de même que : $\boxed{AY > 0}$.

Donc, en remplaçant Y par sa valeur, $A\,(A\,|X| - \rho\,(A)\,|X|) > 0$, donc $AZ - \rho\,(A)\,Z > 0$, donc $\boxed{\rho\,(A)\,Z < AZ}$.

e) $Z \in \mathcal{M}_p\,(\mathbb{R})$, $Z > 0$ et $\rho\,(A)\,Z < AZ$ donc, avec la question $10.c)$, $\rho\,(A) < \rho\,(A)$.

On aboutit donc à une contradiction en supposant $Y \neq 0$, donc $Y = 0$ et $A\,|X| = \rho\,(A)\,|X|$.

Comme $|X| \neq 0$, on a bien $\boxed{\rho\,(A) \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } |X| \text{ est un vecteur propre associ}}$

(12). a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)\,\overline{z_1} + \overline{z_2}\underbrace{(z_1 + z_2)}\ = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1 z_2|$

donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 \underbrace{z_1\overline{z_1}} + \overline{z_1\overline{z_2}}\underbrace{z_2\overline{z_1}} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \underbrace{z_2\overline{z_2}} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1 z_2| \Leftrightarrow 2Re\,(z_1\overline{z_2}) = 2\,|z_1 z_2|$

Or $z_1 = |z_1|\,e^{i\theta_1}$ et $\overline{z_2} = |z_2|\,e^{-i\theta_2}$, avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$, donc $z_1\overline{z_2} = |z_1 z_2|\ e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ car $z_1 z_2 \neq 0 \underbrace{\Leftrightarrow} \cos\,(\theta_1 - \theta_2) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi\theta_1 - \theta_2 \in]-2\pi, 2\pi[\underbrace{\Leftrightarrow}\theta_1 = \theta_2$.

Conclusion : $\boxed{\theta_1 = \theta_2}$.

b) On pose, pour $p \geqslant 2$, l'hypothèse de récurrence$\mathcal{H}_p$:

"si $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont p complexes tous non nuls tq $\left|\sum\limits_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|$, alors $\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ z_j = |z_j|\,e^{i\theta}$ "

$\mathcal{H}_2$ est vraie d'après la question $a)$.

Soit $p \geqslant 2$. On suppose $\mathcal{H}_p$ vraie.

On considère $p+1$ complexes tous non nuls $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}$ vérifiant $\left|\sum\limits_{j=1}^{p+1} z_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p+1} |z_j|$.

On a $\sum\limits_{j=1}^{p+1} |z_j| = \left|\sum\limits_{j=1}^{p+1} z_j\right| = \left|\text{noté } u \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{p} z_j} + z_{p+1}\right| \leqslant |u| \underbrace{\left|\sum\limits_{j=1}^{p} z_j\right|} + |z_{p+1}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j| + |z_{p+1}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p+1} |z_j|$.

Il y a donc égalité partout, et en particulier, $\left|\sum\limits_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|\ (*)$ et $|u + z_{p+1}| = |u| + |z_{p+1}|\ (**)$.

En utilisant $\mathcal{H}_p$ pour $(*)$, on a $\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ z_j = |z_j|\,e^{i\theta}$.

Or $u \neq 0$ car $|u| = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j| > 0$ par hypothèse et $z_{p+1} \neq 0$,

donc en exploitant $a)$ pour $(**)$, on a $\exists \alpha \in [0, 2\pi[,\ u = |u|\,e^{i\alpha}$ et $z_{p+1} = |z_{p+1}|\ e^{i\alpha}$.

Donc $u = |u|\,e^{i\alpha} = \left|\sum\limits_{j=1}^{p} z_j\right| e^{i\alpha}$par $(*)\underbrace{=}\left(\sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|\right) e^{i\alpha} = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|\,e^{i\alpha}$et $u = \sum\limits_{j=1}^{p} z_j = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|\,e^{i\theta}$.

Comme $\sum\limits_{j=1}^{p} |z_j| > 0$, on a $e^{i\alpha} = e^{i\theta}$, avec $\alpha - \theta \in]-2\pi, 2\pi[$, donc $\alpha = \theta$.

Donc $\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![1, p+1]\!]\,,\ z_j = |z_j|\,e^{i\theta}$ et $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

Conclusion, on a montré par récurrence que

$\boxed{\text{si } z_1, z_2, \ldots, z_p \text{ sont } p \text{ complexes tous non nuls vérifiant } \left|\sum\limits_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} |z_j|\,, \text{ alors } \exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![}$

(13). $A\,|X| > 0$ par la question $11.c)$. Or d'après $11.e)$, $A\,|X| = \rho\,(A)\,|X|$, donc $\rho\,(A)\,|X| > 0$.

Comme $\rho\,(A) > 0$ (d'après $11.a)$), on a $\boxed{|X| > 0}$.

De plus $|AX| = |\lambda X| = |\lambda|\,|X| = \rho\,(A)\,|X| = A\,|X|$. Donc $\boxed{|AX| = A\,|X|}$.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j}\,|x_j|$, donc $\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \left|\sum\limits_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{k,j} x_j|$ car $A > 0$

Or pour $k \in [\![1,p]\!]\,,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\,, a_{k,j} x_j \neq 0$, donc avec la question précédente, pour $k = 1$,

$\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ a_{1,j} x_j = |a_{1,j} x_j|\,e^{i\theta}$.

Comme $\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ a_{1,j} > 0$, on a $\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ x_j = |x_j|\,e^{i\theta}$.

Donc $\boxed{\exists \theta \in [0, 2\pi[,\ X = e^{i\theta}\,|X|}$.

(14). a) D'après la question 11., $\rho\,(A)$ est une valeur propre de A de module maximal $(*)$.

Or $AX = A\left[e^{i\theta}\,|X|\right] = e^{i\theta}\,A\,|X|$ question $11 \underbrace{=} e^{i\theta}\,\rho\,(A)\ |X| = \rho\,(A)\,X$

et $AX = \lambda X$ puisque X vecteur propre de A associé à λ.

Donc $\lambda X = \rho\,(A)\,X$, et comme X est un vecteur propre donc est non nul, on a $\lambda = \rho\,(A)\ \ (**)$.

$(*)$ et $(**)$ donnent $\boxed{\rho\,(A) \text{ est l'unique valeur propre de } A \text{ de module maximal}}$.

b) Notons F le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho\,(A)$.

$U \in F$ et $V \in F$ par hypothèse, donc $u_1 V - v_1 U \in F$.

Si on suppose $u_1 V - v_1 U \neq 0$, on a $u_1 V - v_1 U$ vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho\,(A)$, donc $|u_1 V - v_1 U| > 0$.

BY NC ND

D'où toutes les composantes de $u_1V - v_1U$ sont non nulles. On a donc une contradiction, puisque la première composante de $u_1V - v_1U$ est clairement nulle ;
Donc $u_1V - v_1U = 0$. Or, $|U| > 0$ et $|V| > 0$, donc $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$, ce qui donne une contradiction avec U et V linéairement indépendants.
Donc (U, V) est liée.
En particulier, U étant un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$,
on a, pour tout vecteur propre V de A associé à la valeur propre $\rho(A)$, $V \in Vect(U)$.
Donc $F \subset Vect(U)$, et comme $\dim F \geqslant 1$, on a $\underline{F = Vect(U)}$.

$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \rho(A) \text{ est donc de dimension } 1}$.

(15). a) La linéariré de la transposition donne, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, ${}^t(A - \lambda I_p) = {}^tA - \lambda\, {}^tI_p = {}^tA - \lambda I_p$.
[λ est valeur propre de A] $\Leftrightarrow$ [$A - \lambda I_p$ n'est pas inversible] $\Leftrightarrow$ [${}^t(A - \lambda I_p)$ n'est pas inversible]

$\Leftrightarrow$ [${}^tA - \lambda I_p$ n'est pas inversible]

donc [λ est valeur propre de A] $\Leftrightarrow$[λ est valeur propre de ${}^tA$]

Donc $\boxed{A \text{ et } {}^tA \text{ ont les mêmes valeurs propres}}$.

b) D'après la question $14.a)$, $\rho(A)$ est valeur propre de A, donc $\rho(A)$ est valeur propre de ${}^tA$.
$\rho(A)$ est une valeur propre réelle (strictement positive), donc on va considérer que Z est un vecteur propre à coefficients réels pour continuer la question ; (Remarque : ce vecteur Z n'a rien à voir avec celui de la question 11.)
Les valeurs propres de ${}^tA$ sont celles de A, donc $\rho({}^tA) = \rho(A)$.
${}^tA$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, strictement positive, car A l'est, Z est vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A) = \rho({}^tA)$, on peut donc appliquer les résultats trouvés dans les questions précédentes à ${}^tA$. D'où, d'après la question $11.$, $|Z|$ est aussi un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A)$, et $|Z| > 0$.
De plus le sous-espace propre de ${}^tA$ associé à $\rho(A)$ est de dimension 1,(question $14.b)$), donc $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ Z = \alpha |Z|$.
On a $\alpha \neq 0$ car $Z \neq 0$, et les composantes de $|Z|$ sont toutes strictement positives,

donc $\boxed{\text{les coordonnées de } Z \text{ sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives}}$.

c) On note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$. On suppose par exemple que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $z_k < 0$.
$U > 0$, donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $u_k > 0$.

$\rightarrow$ ${}^tZ\,U = \sum_{k=1}^{p} z_k u_k < 0$, donc $\underline{Y \text{ est bien défini}}$. On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $y_k = \frac{1}{{}^tZ\,U} z_k > 0$, donc $\boxed{Y > 0}$.

$\rightarrow$ ${}^tA\,Y = \frac{1}{{}^tZ\,U}\, {}^tA\,Z = \frac{1}{{}^tZ\,U}\, \rho(A)\ Z$, donc $\boxed{{}^tA\,Y = \rho(A)\,Y}$.

$\rightarrow$ $\boxed{{}^tY\,U = \frac{1}{{}^tZ\,U}\, {}^tZ\,U = 1}$.

(16). a) $M^2 = (U\,{}^tY)(U\,{}^tY) = U$ réel$\underbrace{{}^tY\,U}\,{}^tY = = 1\,\underbrace{{}^tY\,U} \times = M\underbrace{U\,{}^tY} = M$, donc $M^2 = M$

et $\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur}}$. On note q ce projecteur.

Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $MV = 0 \Leftrightarrow (U\,{}^tY)\,V = 0 \Leftrightarrow U$réel$\underbrace{({}^tY\,V)} = 0 \Leftrightarrow ({}^tY\,V)\,U =$ 0car $U \neq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}\ {}^tY\,V = 0 \Leftrightarrow V \in (Vect(Y))^{\perp}$.

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} q = (Vect(Y))^{\perp}}$.

$MU = U$ réel$\underbrace{{}^tY\,U} = ({}^tY\,U)\ U$, donc $U \in Imq$, donc $Vect(U) \subset Imq$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(Imq) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\operatorname{Ker} q) = p - (p-1) = 1$, donc $\dim(Vect(U)) = \dim(Imq)$.

D'où $\boxed{Imq = Vect(U)}$.

b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$: " $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$ ".
Le rang 1 est clairement vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.
$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n \times \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)$ par $\mathcal{H}_n \underbrace{=} \left(\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M\right) \times \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)$.

Donc $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{\rho(A)}MA - \frac{1}{\rho(A)^n}A^nM + M^2$.
Or $MA = (U\,{}^tY)\,A = U \times {}^t({}^tA\,Y) = U \times {}^t(\rho(A)\,Y) = \rho(A)\,U\,{}^tY = \rho(A)\,M$,
$A^nM = A^n \times (U\,{}^tY) = (A^nU)\,{}^tY = \rho(A)^n\,U\,{}^tY$, (car U vecteur propre associé à $\rho(A)$), donc $A^nM = \rho(A)^n\,M$,
et $M^2 = M$.
Donc $\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^{n+1} = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - M - M + M = \frac{1}{\rho(A)^{n+1}}A^{n+1} - M$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M}$.

(17). a) Par définition, $(A - \rho(A)\,M)\,W = \mu W$, donc puisque $\mu \neq 0$, $W = \frac{1}{\mu}(A - \rho(A)\,M)\,W$.

Donc $MW = \frac{1}{\mu}\left(= \rho(A)\,M\underbrace{MA} - \rho(A) = M\underbrace{M^2}\right) = 0$, donc $\boxed{MW = 0}$.

Donc, puisque $(A - \rho(A)\,M)\,W = \mu W$, on a $AW - \rho(A)\,MW = \mu W$, donc $AW = \mu W$.
$AW = \mu W$ et $W \neq 0$ car W est un vecteur propre de $(A - \rho(A)\,M)$, donc $\boxed{\mu \text{ est valeur propre de } A}$,

et par définition, $\boxed{|\mu| \leqslant \rho(A)}$.

b) Supposons que $|\mu| = \rho(A)$. Alors, d'après la question $14.a)$, $\mu = \rho(A)$, puisque $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal.
Et, d'après la question $14.b)$, le sous-espace propre de A associé à $\rho(A)$ est de dimension 1. U étant un vecteur propre, on a : $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ W = \alpha U$.
Or $MW = 0$, donc $\alpha MU = 0$. Comme d'après $16.a)$, $MU = U$, on a $\alpha U = 0$, donc $\alpha = 0$ puisque U non nul comme vecteur propre.
Donc $W = 0$, et on a une contradiction avec le fait que W est un vecteur propre.

D'où $\boxed{|\mu| < \rho(A)}$.

c) Pour toute valeur propre μ non nulle de $A - \rho(A)\,M$, on a $|\mu| < \rho(A)$, et le résultat reste vrai si 0 est valeur propre.

Donc $\mu \in Sp(A-\rho(A)M) \max|\mu| < \rho(A)$, donc $\boxed{\rho(A-\rho(A)M) < \rho(A)}$.

Or $\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right) = \rho\left[\frac{1}{\rho(A)}(A-\rho(A)M)\right] = \frac{\rho(A-\rho(A)M)}{\rho(A)} < 1$.

Donc, d'après le résultat admis en fin de partie II, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = 0$.

Et, en utilisant la question 16.b), $\boxed{n \to +\infty\lim\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M}$.

Partie V.

(18). a) $V_0 = \sum\limits_{k=1}^{p} s_k e_k$, et comme $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée, on a $s_1 = \langle V_0, e_1\rangle = {}^tV_0 e_1$.

On note $V_0 = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_p\end{pmatrix}$ et $e_1 = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_p\end{pmatrix}$. On a alors : $s_1 = \sum\limits_{j=1}^{p}\gamma_j\beta_j$.

Or $A > 0$, donc $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal, et le sous-espace propre associé est de dimension 1. (cf partie IV)

Ici, on a donc $\rho(A) = \lambda_1$ et $E_{\lambda_1}(A) = Vect(e_1)$. De plus, toujours avec la partie IV, $|e_1| > 0$ et $|e_1|$ est aussi vecteur propre de A associé à λ_1.

Donc $\exists\alpha \in \mathbb{R}$, $e_1 = \alpha|e_1|$, et $\alpha \neq 0$, car e_1 vecteur propre.

Donc $s_1 = \sum\limits_{j=1}^{p}\gamma_j\alpha|\beta_j| = \neq 0 \underbrace{\alpha} \sum\limits_{j=1}^{p}\gamma_j|\beta_j|$. Or $V_0 > 0$ et $|e_1| > 0$, donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\gamma_j > 0$ et $\beta_j > 0$. Donc $\boxed{s_1 \neq 0}$.

b) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, e_k est vecteur propre de A^n associé à λ_k^n.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^nV_0 = A^n\sum\limits_{k=1}^{p}s_ke_k = \sum\limits_{k=1}^{p}s_kA^ne_k = \sum\limits_{k=1}^{p}s_k\lambda_k^ne_k$.

$(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée,

donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\|V_n\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{p}(s_k\lambda_k^n)^2 = \sum\limits_{k=1}^{p}s_k^2(\lambda_k^2)^n = \lambda_1^{2n}\sum\limits_{k=1}^{p}s_k^2\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n} = \lambda_1^{2n}\left[s_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{p}s_k^2\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n}\right]$.

Or pour tout $k \in [\![2,p]\!]$, $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1$, donc pour tout $k \in [\![2,p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^{2n} = n \to +\infty\lim\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^{2(n+1)} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|V_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = s_1^2,\ \text{puis}\ \|V_n\|^2 n \to +\infty\sim s_1^2\lambda_1^{2n} \quad (\text{car } s_1 \neq 0)$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} n \to +\infty\sim \frac{s_1^2\lambda_1^{2n+2}}{s_1^2\lambda_1^{2n}} n \to +\infty\sim \lambda_1^2$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = |\lambda_1|$. Comme $\lambda_1 = \rho(A) > 0$, on en déduit : $\boxed{n \to +\infty\lim\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}e_1 = \left(\frac{s_1\lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}\right)e_1 + \sum_{k=2}^{p}\frac{s_k\lambda_k^n}{\|V_n\|}e_k.$$

Donc

$$\left\|\frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}e_1\right\|^2 = \left(\frac{s_1\lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}\right)^2 + \sum_{k=2}^{p}\frac{s_k^2\lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2}.$$

Or pour $k \in [\![2,p]\!]$, $\frac{s_k^2\lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2} n \to +\infty\sim \frac{s_k^2}{s_1^2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n}$ et $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right| < 1$, donc pour $k \in [\![2,p]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_k^2\lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_k^2}{s_1^2}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{2n} = 0$.

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|V_n\|^2}{\lambda_1^{2n}} = s_1^2$ donc, puisque $\lambda_1 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|V_n\|}{\lambda_1^n} = |s_1|$, donc $n \to +\infty\lim\frac{s_1\lambda_1^n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|}$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|}e_1\right\|^2 = 0$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|}e_1 = \begin{cases} e_1 \text{ si } s_1 > 0\\ -e_1 \text{ si } s_1 < 0\end{cases}}$.

(19). a) Procedure Puissance($A : matrice; n : integer; V_0 : vecteur; var\ \ V : vecteur$) ;

```
var k : integer; T : vecteur;
begin affecte(V0, V) ;
      for k := 1 to n do begin prodmatrice(A, V, T) ;
                               affecte(T, V) ;
                         end ;
end ;
```

b) e_1 et $-e_1$ étant des vecteurs propres, peu importe le signe de s_1.

On choisira donc de prendre comme valeur approchée de λ_1 le réel $\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|}$ pour n suffisamment grand, et comme vecteur propre associé $\frac{V_n}{\|V_n\|}$, toujours pour n suffisamment grand.

```
Procedure vectpropre(A; matrice; n : integer; V0 : vecteur; var  V : vecteur ) ;
  var k : integer; a : real;
  begin Puissance(A, n, V0, V) ;
        a := norme (V) ;
        for k := 1 to p do V [k] := V [k] /a;
  end ;
```

```
Procedure valpropre(A; matrice; n : integer; V0 : vecteur) : real;
var V, W : vecteur;  k : integer;
Begin for k := 1 to n do begin affecte(V0, V) ;
                               prodmat(A, V0, W) ;
                               affecte(W, V0) ;
                         end ;
      valpropre:= norme (V0) /norme (V) ;
end ;
```