Exercice| [5070] | 1| Étude d'un jeu | ECRICOME 2008 Filière ECS

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, et p est un entier naturel.
Un jeu oppose n joueurs J_1, J_2,..., J_n.
Le jeu se déroule de la façon suivante :

— une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois ;
— avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour « pile ») ou F (pour « face ») ;
— les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et il se partage équilablement la somme de $n!$ euros.

Pour exemple, pour $p=1$, si les lancers donnent trois fois « pile », le joueur ayant noté (P,F,P) a deux prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P,F,P, le joueur ayant noté (F,P,F) n'a aucune prévision correcte.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, et on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de la variable aléatoire G_i.
L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1, selon deux stratégies présentées dans les questions **(2)** et **(3)**.

(1). Résultats préliminaires

(a). Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.
On pose alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et tout $k \in X_i(\Omega)$: $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $r_k = \mathbb{P}(X_i \leq k)$.

(b). On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

(i). Calculer $S_p + T_p$.

(ii). Montrer que $S_p = T_p$.

(iii). Déduire des deux résultats précédentes la valeur de S_p, puis montrer que $r_p = \dfrac{1}{2}$.

(2). Les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres :
Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

(a). Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1},\ j \in [\![0;n-1]\!] \right\}$.

(b). (i). Montrer que $\mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

(ii). Montrer que, pour tout $j \in [\![0;n-2]\!]$: $\quad \mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = 0$.

(iii). En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :

$$E(G_1 | [X_1 = 0]) = (n-1)!\,(q_0)^{n-1}$$

(c). (i). Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout $j \in [\![0;n-1]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j} (q_k)^j \,(r_{k-1})^{n-1-j}$$

(ii). Établir que $\dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$, puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :

$$E(G_1 | [X_1 = k]) = (n-1)!\,\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}$$

(iii). Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

(d). Établir alors que $E(G_1) = (n-1)!$.

(3). J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la question (2).
Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard, mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de J_1. Par exemple, pour $p=1$, si J_1 a choisi (F,P,P), alors J_2 choisit (P,F,F).
On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifes de J_1 et J_2 : $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.
On pose, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in X_i(\Omega)$: $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $r_k = \mathbb{P}(X_i \leq k)$.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleurs de J_1 et J_2.

(a). (i). Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p+1$ prévisions correctes.

(ii). En déduire que $Y(\Omega) = [\![p+1;2p+1]\!]$.

(b). Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F,P,P et ou P,F,F et Y prend la valeur 2 sinon.

(c). Pour tout $k \in [\![p+1;2p+1]\!]$ montrer que $\mathbb{P}(Y=k) = 2q_k$.

(d). Montrer que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1},\ j \in [\![0;n-2]\!] \right\}$.

(e). (i). Établir que, pour tout $k \in [\![p+1;2p+1]\!]$ et tout $j \in [\![0;n-2]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j} (q_k)^j \,(r_{k-1})^{n-2-j}$$

(ii). En déduire que, pour tout $k \in [\![p+1;2p+1]\!]$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y=k]$ est :

$$E(G' | [Y=k]) = n(n-2)!\,\frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}$$

(f). (i). En déduire en utilisant la question **(1)(a).**, que : $E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

(ii). Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3 \Rightarrow 2^{n-1} > n$$

(iii). Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.

Éléments de correction

[pb]

(1). (a). Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On s'intéresse à la série des pronostics effectuée par le joueur i. La situation peut se modéliser de la manière suivante :

Épreuve de Bernoulli : On fait un pronostic et on regarde si ce dernier correspond au résultat du lancer de dé. On considère qu'il y a « succès » lorsque le pronostic est correct, et c'est le cas avec la probabilité $p = \dfrac{1}{2}$

Schéma de Bernoulli : On effectue $2p+1$ lancers de dés et on effectue les pronostics préalablement comme décrit dans la règle du jeu. Ces pronostics et les résultats obtenus réellement pouvant être considérés comme indépendants les uns des autres, il s'agit donc d'une répétition de $2p+1$ épreuves de Bernoulli, identiques et de manière indépendante. Ainsi, la variable aléatoire qui compte le nombre d'événements succès lors de la réalisation de ces épreuves, suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2p+1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Or X_i compte le nombre de pronostics corrects, et par conséquent le nombre de succès. Donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2p+1, \dfrac{1}{2}\right)$.

(b). (i). On a $S_p + T_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$ et en remarquant que $1 = 1^k \times 1^{2p+1-k}$, on peut écrire $S_p + T_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} = 2^{2p+1}$ d'après la formule du binôme.

(ii). On sait que $\dbinom{2p+1}{k} = \dbinom{2p+1}{2p+1-k}$, donc $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2p+1-k}$ et en effectuant le changement d'indices $\ell = 2p+1-k$, on en déduit que $S_p = \displaystyle\sum_{\ell=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{\ell} = T_p$.

(iii). Ainsi, $S_P + T_p = 2S_p$ et puisque $S_p + T_p = 2^{2p+1}$ on en déduit que $S_p = 2^{2p}$.

Par suite, $r_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1-k}$. D'où $r_p = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1} \times S_p$ et finalement $r_p = \dfrac{1}{2}$.

(2). (a). Pour le joueur J_1, deux cas de figures se présentent :

— soit il perd et dans ce cas, son gain G_1 est nul ;

— soit il gagne et dans ce cas, son gain dépend du nombre $j \in [\![0; n-1]\!]$ de joueurs qui ont aussi gagné. Il y aura donc $j+1$ individus qui se partageront la somme de $n!$ euros, et donc le gain du joueur J_1 sera dans ce cas $\dfrac{n!}{j+1}$.

On en déduit donc que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1}, j \in [\![0; n-1]\!] \right\}$.

(b). (i). On remarquera qu'un gain pour un individu de $\dfrac{n!}{n}$ correspond au fait que tous les joueurs ont exactement le même nombre de bon pronostics.

Supposons donc que le joueur 1 n'a aucun bon pronostic, c'est à dire que l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé. Son gain G_1 prend la valeur $\dfrac{n!}{n}$ si et seulement si tous les autres candidats n'ont eux aussi aucun bon résultat.

Ainsi $\mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap \ldots \cap [X_n = 0]) \underset{\textbf{les } X_i \textbf{ sont mut. indép.}}{=} \mathbb{P}(X_2 = 0) \times \ldots \mathbb{P}(X_n = 0)$ et puisque $\mathbb{P}(X_i = 0) = q_0$ pour tout entier $i \in [\![2; n]\!]$, on en conclut que $\mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

(c). (i). Soit un entier j de $[0; n-1]$.

On suppose donc que l'on travaille dans le cas où le joueur 1 n'a aucun bon résultat, c'est à dire que l'on a $[X_1 = 0]$.

Le gain du joueur 1, vaut $\dfrac{n!}{j+1}$ (c'est à dire, il y a $j+1$ gagnants qui se partagent le gain global), si et seulement si, exactement $j+1 \in [\![1; n]\!]$ autres joueurs n'ont aucun bon résultats. Cela sous-entend alors que les $n-(j+1)$ autres joueurs, ont au moins un bon résultat, et donc se partagent les $n!$ euros. Par suite, on a $\mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = 0$.

(ii). On en déduit directement alors que :

$$E(G_1|X_1 = 0) = 0 \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}(G_1 = 0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{j+1} \mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \frac{n!}{n-1+1} \mathbb{P}_{[X_1=0]}$$

(d). (i). Soit $k \in X_1(\Omega)$ et un entier $j \in [\![0; n-1]\!]$.

On suppose donc que l'on travaille dans le cas où le joueur 1 a exactement k bons résultats, c'est à dire que l'on a $[X_1 = k]$.

Le gain du joueur 1 sera de $\dfrac{n!}{j+1}$ dès lors qu'exactement j autres joueurs auront k bons résultats, les autres $n-(j+1)$ joueurs ayant au plus $k-1$ résultats :

— Il y a $\dbinom{n-1}{j}$ façons de choisir les j autres joueurs, ces choix étant tous équiprobables ;

— Leur probabilité est alors égale à :

$$\mathbb{P}([X_2 = k] \cap \ldots \cap [X_{j+1} = k] \cap [X_{j+2} \leq k-1] \cap [X_n \leq k-1]) \underset{\textbf{les } X_i \textbf{ sont mut. indép.}}{=} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1}$$

compte-tenu des notations de l'énoncé.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}_{[X_1=k]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = \dbinom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}$.

(ii). On a directement que $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{(n-1)!}{(j+1)!(n-1-j)!} = \dfrac{1}{n}\dfrac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$.

Soit alors $k \in X_1(\Omega) \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
E\left(G_{|}X_1 = k\right) &= 0 \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}\left(G_1 = 0\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} \mathbb{P}_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{n} \binom{n}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-j} \\
&= \frac{(n-1)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} (q_k)^{j+1} (r_{k-1})^{n-1-j} \\
&= \frac{(n-1)!}{q_k} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-j} \\
&= \frac{(n-1)!}{q_k} \left((q_k + r_{k-1})^n - (q_k)^0 (r_{k-1})^n\right) \\
&= (n-1)! \frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}
\end{aligned}$$

(iii). On pose $r_{-1} = 0$ et on a $r_0 = q_0$. Ainsi, $(n-1)!\dfrac{(r_0)^n - (r_{-1})^n}{q_k} = (n-1)!\dfrac{(q_0)^n}{q_0} = (n-1)!\,(q_0)^{n-1}$ ce qui est la formule trouvée plus haut pour $k = 0$.

(e). On utilise donc la formule de l'espérance totale pour obtenir :

$$\begin{aligned}
E(G_1) &= \sum_{k=0}^{2p+1} E\left(G_1 | X_1 = k\right) \mathbb{P}\left(X_1 = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{2p+1} (n-1)! \frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} q_k \\
&= (n-1)! \sum_{k=0}^{2p+1} \left((r_k)^n - (r_{k-1})^n\right) \\
&= (n-1)! \left((r_{2p+1})^n - (r_{-1})^n\right) \\
&= (n-1)! \left(1^n - 0^n\right) = (n-1)!
\end{aligned}$$

(3). (a). (i). Les deux joueurs ont à eux-deux tous les bons résultats, puisque si pour l'un il est mauvais, il est bon pour l'autre. Ainsi, $X_1 + X_2 = 2p+1$. Cette somme étant impaire, on a nécessairement $X_1 > X_2$ ou $X_1 < X_2$. Lorsque $X_1 < X_2$, on a donc $2X_1 < 2p+1$ et donc $2X_1 \leq 2p$ et donc $X_1 \leq p$ et $X_2 \geq p+1$, ceci étant symétrique entre X_1 et X_2. Par conséquent l'un d'entre eux a au moins $p+1$ résultats corrects.

(ii). Par définition Y est la variable aléatoire égale au maximum du nombres de pronostics corrects de de chacun des deux joueurs, donc Y vaut au minimum $p+1$, et par suite au maximum $2p+1$, en valeurs entières évidemment. Par conséquent $Y(\Omega) = [\![p = 1; 2p+1]\!]$.

(b). Le joueur J_1 pronostiquant (F, P, P) et le joueur 2 pronostiquant (P, F, F), Y prend la valeur 3 lorsque l'une de ces deux prévisions apparararaît et seulement dans ce cas, et comme $p = 1$, Y prend une valeur supérieure ou égale à 2 dans les autres cas.

(c). Soit $k \in [\![p1+; 2p+1]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}\left(\max(X_1, X_2) = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(([X_1 = k] \cap [X_2 = 2p+1-k]) \cup ([X_1 = 2p+1-k] \cap [X_2 = k])\right) \\
&\underset{\substack{\text{réunion}\\ \text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}\left([X_1 = k] \cap [X_2 = 2p+1-k]\right) + \mathbb{P}\left([X_1 = 2p+1-k] \cap [X_2 = k]\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = k) + \mathbb{P}(X_2 = k) = q_k + q_k = 2q_k
\end{aligned}$$

(d). Pour établir le gain G', deux situations se présentent :

— ou bien les deux joueurs sont battus par au moins un autre joueur, et dans ce cas, leur gain est nul ;

— ou bien l'un des deux a le nombre de pronostics maximal sur l'ensemble de la partie mais avec au plus $n-2$ joueurs qui atteignent le même score que lui.

Ainsi, $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{n!}{j+1},\ j \in [\![0; n-2]\!]\right\}$

(e). (i). On utilise les résultats de la question **(2).** dans son ensemble : ces derniers, établis pour une partie à n joueurs, sont encore valable pour une partie à $n-1$ joueurs, puisque l'on regarde le couple de joueurs X_1 et X_2 comme étant un seul et même joueur qui permet de pronostiquer un valeur que l'on attribue à Y. Ainsi, on a le résultat demandé.

(ii). Soit alors $k \in [\![p+1; 2p+1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
E\left(G' | Y = k\right) &= 0 \times \mathbb{P}_{[Y=k]}\left(G' = 0\right) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \mathbb{P}_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} \binom{n-2}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{n-1} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-2j} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j+1} (q_k)^{j+1} (r_{k-1})^{n-1-j-1} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-j} \\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k} \left((q_k + r_{k-1})^{n-1} - (q_K)^0 (r_{k-1})^{n-1}\right) \\
&= n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

(f). (i). On utilise la formule de l'espérance totale pour obtenir :

$$E(G') = n(n-2)! \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k} = 2n(n-2)! \left((r_{2p+1})^{n-1} - (r_p)^{n-1}\right)$$

où l'on a $r_{2p+1} = 1$ et $r_p = \dfrac{1}{2}$. On en déduit alors que $E(G') = 2n(n-2)!\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

(ii). Montrons par récurrence sur n la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $2^{n-1} > n$ ».

— Pour $n = 3$, on a $2^{n-1} = 4$ et $4 > 3$, donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

— Supposons que pour un $n \geq 3$ on ait $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $2^{n-1} > n$, et montrons que, sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir que $2^{(n+1)-1} > n+1$.
On a $2^{n+1-1} = 2 \times 2^{n-1} > 2n > n+n > n+1$ puisque $n > 1$, on a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

— La propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 3 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 3$.

Ainsi, pour tout $n \geq 3$, on a bien $2^{n-1} > n$.

(iii). Comme $G_1' = \dfrac{1}{2} G'$, on a directement $E\left(G_1'\right) = n(n-2)!\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Comme $2^{n-1} > n$, on a alors $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} > \dfrac{n-1}{n}$ et par suite $E\left(G_1'\right) > \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{n} = (n-1)! = E\left(G_1\right)$, et par conséquent cette stratégie est plus avantageuse.