Exercice| [5069] | 1| Fonction définie par une série | ECRICOME 2008 Filière ECS

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

(1). (a). Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

(b). Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

(c). Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

(2). Etude de la dérivabilité de F. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $splaystyle \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.

(a). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{n^3}$$

(b). En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $\quad |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

(c). Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq K\,|h|$

(d). En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.

(3). Recherche d'un équivalent en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

(a). Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k+1}(x) \leq nt_k^{k+1}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq f_k(x)$

(b). En déduire que, pour $n \geq 2$, $nt_1^{n+1}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \dfrac{x}{x+1} + nt_1^n\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$

(c). En déduire que : $splaystyle \ln(1+x) \leq F(x) \leq \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

(d). Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

(1). Soit x un réel positif. $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n\,(n+x)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$.

De plus la série de terme général $\dfrac{x}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f_n(x)$ converge.

Donc pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ converge.

(2). $F(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$. $F(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{r \to \infty}\left(\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{r \to \infty}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = 1$.

Ainsi, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

(3). Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}_+^*$. $f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

De plus la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $f_n'(x)$ converge.

Finalement, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ converge.

(4). (a). φ est de classe $\mathcal{C}^2$sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soient x et x_0 deux éléments de $[n, \infty[$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leq \dfrac{|x - x_0|^2}{2\,!} \displaystyle\max_{t \in [x_0, x] \text{ ou } [x, x_0]} |\varphi''(t)|$.

Notons que $\forall t \in [n, \infty[,\ |\varphi''(t)| = \dfrac{2}{t^3} \leq \dfrac{2}{n^3}$. Alors $\displaystyle\max_{t \in [x_0, x] \text{ou } [x, x_0]} |\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3}$.

Par conséquent : $|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leq \dfrac{(x - x_0)^2}{n^3}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x, x_0) \in ([n, \infty[)^2,\ |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\,\varphi'(x_0)| \leq \dfrac{(x - x_0)^2}{n^3}$.

(b). x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$, $h \neq 0$ et $x + h \in \mathbb{R}_+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x+h} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+x} - h\,\dfrac{1}{(n+x)^2}\right|$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = |-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + h\,\varphi'(n+x)| = |\varphi(n + x + h) - \varphi(n + x) - h\,\varphi'(n + x)|$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| = |\varphi(n + x + h) - \varphi(n + x) - \big(n + x + h - (n + x)\big)\,\varphi'(n + x)|$.

Or $n + x + h$ et $n + x$ sont deux éléments de $[n, \infty[$. b. donne alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| \leq \dfrac{(n + x + h - n - x)^2}{n^3} = \dfrac{h^2}{n^3}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)|$.

D'où, si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$, $h \neq 0$ et $x + h \in \mathbb{R}_+$ alors la série de terme général $|f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)|$ est convergente.

(c). x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$, $h \neq 0$ et $x + h \in \mathbb{R}_+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)| \leq \dfrac{h^2}{n^3}$. De plus la série de terme général $f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)$ est absolument convergente et la série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ converge. Alors :

$\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)\big)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\big|f_n(x + h) - f_n(x) - h\,f_n'(x)\big| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Les séries de termes généraux $f_n(x+h)$, $f_n(x)$ et $f'_n(x)$ étant convergentes on a encore : $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)\right| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ ou $|F(x+h)-F(x)-h\,G(x)| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

En divisant par $|h|$ on obtient : $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Donc, si x et h sont deux réels tels que $x \in \mathbb{R}_+$, $h \neq 0$ et $x+h \in \mathbb{R}_+$ alors : $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq K\,|h|$ où $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

(d). Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. $\forall h \in]-x, 0[\cup]0, \infty[$, $0 \leq \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq K\,|h|$ et $\lim_{h\to 0}(K\,|h|) = 0$.

Alors, par encadrement on obtient : $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$. Ainsi F est dérivable en x et $F'(x) = G(x)$.

Finalement, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F' = G$.

(5). (a). Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$ et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall t \in]0, \infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$.

$\forall t \in]0, \infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{x}{t\,(t+x)}$. φ_x est dérivable sur $]0, \infty[$ et $\forall t \in]0, \infty[$, $\varphi'_x(t) = -\frac{x(2t+x)}{(t\,(t+x))^2}$.

$\forall t \in]0, \infty[$, $\varphi'_x(t) \leq 0$. φ_x est donc décroissante sur $]0, \infty[$.

Ainsi $\forall t \in [k, k+1]$, $f_{k+1}(x) = \varphi_x(k+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(k) = f_k(x)$.

En intégrant il vient : $f_{k+1}(x) = \int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}t = f_k(x)$.

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq f_k(x)$.

(b). Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$. Soit $n \geq 2$.

La question **(4)(a)** donne : $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

La même question donne encore : $\int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_1(x)$.

Ainsi : $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \leq \sum_{k+1}^{n} f_k(x) \leq f_1(x) + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$. Or $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$. Donc

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \geq 2$, $\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$.

(c). Soit x un élément de $\mathbb{R}_+$.

$\forall n \geq 2$, $\int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = \Big[\ln|t| - \ln|t+x|\Big]_1^n = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

Notons également que : $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) = 0$. Alors $\lim_{n\to\infty} \left(\int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x)$.

On a encore $\lim_{n\to\infty} \left(\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t\right) = \ln(1+x)$.

En faisant tendre n vers ∞ dans l'encadrement de b. il vient : $\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.

(d). $\forall x \in]1, \infty[$, $\ln x > 0$ donc $\forall x \in]1, \infty[$, $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \leq \frac{F(x)}{\ln x} \leq \frac{x}{x+1}\frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

Or $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 1$.

De plus : $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\frac{1}{\ln x}\right) = 1 \times 0 = 0$. On obtient alors par encadrement $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\ln x} = 1$. Finalement :

En conclusion, $F(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \ln x$.