Exercice| [5068] | 1| Projecteur de $\mathbb{R}^3$ | ECRICOME 2008 Filière ECS

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées (a,b,c) dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.
On a donc $a^2+b^2+c^2=1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$, et $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1). Que vaut $p+q$?

(2). Exprimer, pour $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $p\left(\overrightarrow{v}\right)$ à l'aide $\left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{u} \right\rangle$ et de $\overrightarrow{u}$.

Calculer alors $p\left(\overrightarrow{i}\right)$, $p\left(\overrightarrow{j}\right)$ et $p\left(\overrightarrow{k}\right)$.

(3). Déduire des questions précédentes les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

(4). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

- **(a).** Montrer que $M^2 = -Q$.
- **(b).** Calculer $f\left(\overrightarrow{u}\right)$. En déduire que $\operatorname{rg}(f) \leq 2$, puis déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.
- **(c).** Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
  Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.
- **(d).** Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

(5). Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :

$$g_\theta = \mathrm{Id} + (\sin(\theta))\, f + (1-\cos(\theta))\, f^2 \qquad \text{où } f^2 = f \circ f$$

- **(a).** Pour θ et θ' réels, calculer g_θ et $g_{\theta'}$, et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.
- **(b).** En déduire que, pour tout réel θ, g_θ et inversible et déterminer son inverse.

Éléments de correction

(1). Soit v un élément de $\mathbb{R}^3$. Il existe un unique élément (v_1,v_2) de $\mathcal{D}\times\mathcal{D}^\perp$ tel que $v = v_1+v_2$.
Par définition $p(v) = v_1$ et $q(v) = v_2$ donc $(p+q)(v) = p(v)+q(v) = v_1+v_2 = v$ ce qui signifie bien $p+q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

(2). (u) est une base orthonormée de $\mathcal{D}$. Le cours donne alors $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) = \langle vu\,|u\rangle$.
Notons que $\langle i\,|u\rangle = a$, $\langle ju\,|\rangle = b$ et $\langle k\,|u\rangle = c$. Ainsi : $p(i) = a\,u = a\,(a\,i+b\,j+c\,k)$, $p(j) = b\,u = b\,(a\,i+b\,j+c\,k)$ et $p(k) = c\,u = c\,(a\,i+b\,j+c\,k)$.

(3). Alors : $P = M_{(i,j,k)}(p) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

De plus : $q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ donc $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

Finalement : $P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

(4). (a). $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2-a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix} = -Q$ et ainsi $M^2 = -Q$.

(b). $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors : $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.
Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f \leq 3-1 = 2$, et ainsi $\operatorname{rg}(f) \leq 2$.
$f \circ f = -q$ car $M^2 = -Q$. Ainsi $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im}(-q) = \operatorname{Im} q = \mathcal{D}^\perp$. Alors $\mathcal{D}^\perp = \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
Ceci donne en particulier : $2 = \dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f^2 \leq \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Alors $\operatorname{rg} f \geq 2$.
Finalement $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = 2$.
Alors $\mathcal{D}^\perp \subset \operatorname{Im} f$ et $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \operatorname{Im} f = 2$ donc $\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp$.
Dans ces conditions $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3-2 = 1$. De plus u est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$.
Alors $\operatorname{Ker} f = (\overrightarrow{\ } u) = \mathcal{D}$. AInsi : $\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp$ et $\operatorname{Ker} f = \mathcal{D}$.
$\forall v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $f(p(v)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $f \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

(c). $f^2 = -q = p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ donc $f^3 = f \circ p - f = -f$. Ainsi $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et donc $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

(d). L'ensemble des valeurs propres de f est contenu dans l'ensemble des zéros de $X + X^3$ dans $\mathbb{R}$ donc 0 est la seule valeur propre possible de f.
Or $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi f n'est pas diagonalisable. 0 est la seule valeur propre de f et f n'est pas diagonalisable.

(5). (a). Soient θ et θ' deux réels. $g_\theta \circ g_{\theta'} = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta\, f + (1-\cos\theta)\, f^2) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin\theta'\, f + (1-\cos\theta')\, f^2)$.
$g_\theta \circ g_{\theta'} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin\theta' + \sin\theta)\, f + \big((1-\cos\theta') + \sin\theta\,\sin\theta' + (1-\cos\theta)\big)\, f^2 + \big(\sin\theta\,(1-\cos\theta')\sin\theta + (1-\cos\theta)\,\sin\theta'\big)\, f^3 + (1-\cos\theta)(1-\cos\theta')\, f^4$.
Notons que $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$. Il vient alors :

- $g_\theta \circ g_{\theta'} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta' + \sin\theta - \sin\theta\,(1-\cos\theta') - (1-\cos\theta)\,\sin\theta'\big)\, f + \big(1 - \cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta' + 1 - \cos\theta - (1-\cos\theta)(1-\cos\theta')\big)\, f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \big(\sin\theta\,\cos\theta' + \cos\theta\,\sin\theta'\big)\, f + \big(1 - (\cos\theta\,\cos\theta' - \sin\theta\,\sin\theta')\big)\, f^2$.
- $g_\theta \circ g_{\theta'} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta+\theta')\, f + \big(1-\cos(\theta+\theta')\big)\, f^2 = g_{\theta+\theta'}$, et donc : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall\theta' \in \mathbb{R}$, $g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}$.

(b). Notons que $g_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Alors $g_\theta \circ g_{(-\theta)} = g_{\theta+(-\theta)} = g_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. De même $g_{(-\theta)} \circ g_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi : g_θ est inversible et $g_\theta^{-1} = g_{(-\theta)}$.