Exercice| [5067] | 1| Étude d'une suite | HEC|ESSEC 2010 Filière ECS

On note $\ln(x)$ le logarithme népérien d'un réel strictement positif x et $\log_2(x)$ son logarithme en base 2. On rappelle que $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Partie A - Étude d'une suite réelle

Dans cette partie, la lettre n désignera toujours un entier naturel au moins égal à 2.
On considère la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par son premier terme u_1, et vérifiant, pour tout n, la relation de récurrence :

$$u_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} u_i$$

(1). (a). Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1.

(b). Montrer que, pour tout n au moins égal à 3, on a :

$$nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$$

(2). Pour tout entier naturel k non nul, on pose $v_k = \dfrac{u_k}{k+1}$.

(a). Pour tout n au moins égal à 3, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.

(b). Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout réel x non nul et distinct de -1, l'égalité :

$$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$$

(c). Pour tout n, établir l'égalité :

$$v_n = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}$$

(3). Pour tout n, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ et $z_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$.

(a). Calculer u_n en fonction de h_n, u_1 et n.

(b). Prouver l'égalité : $h_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} z_k + \ln(n)$.

(c). Déterminer la nature de la série de terme général z_n.

(d). En déduire un équivalent de h_n quand n tend vers $+\infty$.

(e). Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie B - Étude d'une suite de variables aléatoires

(1). On considère un espace probabilisé dont la probabilité est notée P, une variable aléatoire Z, définie sur cet espace, prenant un nombre fini de valeurs réelles notées $z_1, \ldots, z_p$, et un événement A de probabilité non nulle.
On note $E(Z|A)$ l'espérance de la variable aléatoire Z pour la probabilité conditionnelle sachant A, c'est à dire :

$$E(Z|A) = \sum_{i=1}^{p} z_i \mathbb{P}_A([Z = z_i])$$

Soit $(A_1, \ldots, A_q)$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle.
Prouver l'égalité :

$$E(A) = \sum_{j=1}^{q}\mathbb{P}(A_j)\, E(Z|A_j)$$

(2). Toutes les variables aléatoires considérées dans cette question sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée P.
On considère une suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires telle que, pour tout n non nul, I_n suit la loi uniforme sur l'ensemble $[1;n]$ des entiers compris, au sens large entre 1 et n.
D'autre part, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires ayant les propriétés suivantes :

- X_1 est la variable constante égale à 0 ;
- pour tout entier naturel n au moins égal à 2, les lois conditionnelles de X_n scahant $[I_n = 1]$ et de X_n sachant $[I_n = n]$ sont toutes les deux égales à la loi de $n - 1 + X_{n-1}$;
- pour tout entier naturel n au moins égal à 2, et tout entier i tel que $2 \leq i \leq n-1$, la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = i]$ est égale à la loi de $n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$ où $Z_{n,i}$ et $T_{n,i}$ sont deux variables aléatoires indépendantes, $Z_{n,i}$ ayant même loi que X_{i-1} et $T_{n,i}$ ayant même loi que X_{n-i}.

Par exemple, on a : $\mathbb{P}_{[I_6=1]}(X_6 = 9) = \mathbb{P}(X_5 = 4)$ et aussi $\mathbb{P}_{[I_6=3]}(X_6 = 9) = \mathbb{P}(Z_{6,3} + T_{6,3} = 4)$ ce qui, compte tenu des hypothèses, s'écrit $\mathbb{P}_{[I_6=3]}(X_6 = 9) = \displaystyle\sum_j \mathbb{P}(X_2 = j)\,\mathbb{P}(X_3 = 4 - j)$, la somme étant étendue aux valeurs convenables de l'entier j.

(a). Montrer que X_2 est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 1.

(b). Établir les égalités :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{2}{3}$$

Calculer l'espérance de X_3 que l'on notera U_3.

(3). Déterminer la loi de X_4 et calculer son espérance que l'on notera U_4.

(4). En procédant par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, X_n prend, presque sûrement, des valeurs entières inférieures ou égales à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(5). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note U_n l'espérance de X_n.

(a). À l'aide des résultats de la question **(B)(1)**, établir l'égalité : $U_n = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} U_i$.

(b). À l'aide de la partie **(A)**, donner l'expression de U_n en fonction de$n$, ainsi qu'un équivalent de U_n quand n tend vers $+\infty$.

(6). Pour tout entier naturel n non nul, on note α_n la plus petite valeur (entière) prise par la variable X_n avec une probabilité non nulle.

(a). Soit n et k deux entiers naturels, l'entier n étant au moins égal à 3.
Montrer que $\mathbb{P}(X_n = k)$ est nul si et seulement si les nombres $\mathbb{P}(n-1+X_{n-1}=k)$ et $\mathbb{P}(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k)$, l'entier i variant de 2 à $n-1$, sont nuls.
En déduire que α_n est au moins égal au minimum des nombres $n-1+\alpha_{n-1}$, $n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \ldots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1$.

(b). On considère la fonction g définie, pour tout x strictement positif, par $g(x) = x\log_2(x) - 2x + 2$.

(i). Montrer que g est convexe. Pour tout couple d'entiers (i, n) tel que $2 \leq i \leq n-1$, en déduire l'inégalité :

$$g(i) + g(n+1-i) \geq 2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

(ii). Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité :

$$g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1)$$

En traitant à part les cas $n=1$ et $n=2$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$g(n+1) - g(n) \leq n-1$$

(c). En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\alpha_n \geq (n+1)\log_2(n+1) - 2n$$

Éléments de correction

Partie A - Étude d'une suite réelle

(1).(a). On a $u_2 = 2-1+\frac{2}{2}\sum_{i=1}^{2-1} = 1+u_1$ et $u_3 = 3-1+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3-1} u_i = \frac{8}{3}+\frac{4}{3}u_1$.

(b). On a $u_n = n-1+\frac{2}{n}\sum_{n=1}^{n-1} u_i$, d'où $2\sum_{i+1}^{n-1} u_i = nu_n - n(n-1)$.

Sur le même principe, on a $2\sum_{i=1}^{n-2} u_i = (n-1)u_{n-1} - (n-1)(n-2)$ et par conséquent :

$$2u_{n-1} = 2\sum_{i=1}^{n-1} u_i - 2\sum_{i=1}^{n-2} u_i = nu_n - n(n-1) - (n-1)u_{n-1} + (n-1)(n-2)$$

ce qui donne $0 = nu_n - (n-1+2)u_{n-1} - 2n + 2$ soit $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n-2$.

(2).(a). De $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n-2$, on tire que :

$$\frac{nu_n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)u_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

et ainsi $v_n - v_{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{n(n+1)}$.

(b). On montre que $\dfrac{2x-2}{x(x+1)} = \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{2}{x}$ par identification des numérateurs.

(c). On a, pour $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
v_n &= v_n - v_2 + v_2 \\
&= \sum_{k=3}^{n}(v_k - v_{k-1}) + v_2 \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{2(k-1)}{k(k+1)} + \frac{u_2}{3} \\
&= -\sum_{k=3}^{n}\frac{2}{k} + \sum_{k=3}^{n}\frac{4}{k+1} + \frac{1+u_1}{3} \\
&= -2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 2\times\frac{1}{2} + 4\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} \\
&= 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + 1 - \frac{10}{3} + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3} + \frac{4}{n+1} \\
&= 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 2 + \frac{u_1}{3} + \frac{4}{n+1}
\end{aligned}$$

le résultat étant encore vraie pour $n=2$ étant donné qu'il suffit de remettre en forme la formule à partir de $v_2 = \dfrac{1+u_3}{3}$.

(3).(a). On a directement : $u_n = (n+1)v_n = (n+1)\left(2h_n + \dfrac{u_1}{3} - 2 + \dfrac{4}{n+1}\right)$

(b). On a directement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} z_k + \ln(n) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right) + \ln(n) \\
&= h_n - \sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) + \ln(n) \\
&= h_n - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) + \ln(n) \\
&= h_n
\end{aligned}$$

(c). En écrivant $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = -\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, il vient :

$$z_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{soit} \qquad z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

qui est le terme général d'une série à termes négatifs. En prenant son opposé, puisque la série $\sum_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on montre que la série $\sum_{n\geq2} -z_n$ converge, et par suite que $\sum_{n\geq2} z_n$ converge.

(d). Puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que la série $\sum_{n\geq2} z_n$ converge, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=2}^{n} z_k}{\ln(n)} = 0$, et par conséquent que $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc que $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(e). De la question précédente, on en déduit que $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et par suite que $\dfrac{\dfrac{u_1}{3}-2+\dfrac{4}{n+1}}{2h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{u_n}{(n+1)\times 2h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(n+1)\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln(n)$.

Partie B - Étude d'une suite de variables aléatoires

(1). *C'est la démonstration de la formule de l'espérance totale, qu'il s'agit d'adapter avec des variables aléatoires à support fini, autrement des sommes doubles, et non pas des séries doubles.*

Le système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_q)$ permet d'écrire, que :

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \qquad \mathbb{P}(Z=z_i) = \sum_{j=1}^{q} \mathbb{P}_{A_j}(Z=z_j)\,\mathbb{P}(A_j)$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i+1}^{p} z_i \left(\sum_{j=1}^{q} \mathbb{P}_{A_j}(Z=z_j)\,\mathbb{P}(A_j)\right) \\ &= \sum_{j+1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} z_i \mathbb{P}_{A_j}(Z=z_i)\right)\mathbb{P}(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{q} E(Z|A_j)\,\mathbb{P}(A_j) \end{aligned}$$

(2). (a). Il s'agit de montrer que $\mathbb{P}(X_2=1)=1$. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2=1) &= \mathbb{P}_{[I_2=1]}(X_2=1)\,\mathbb{P}(I_2=1) + \mathbb{P}_{[I_2=2]}(X_2=1)\,\mathbb{P}(I_2=1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(2-1+X_{2-1}=1) + \mathbb{P}(2-1+X_{2-1}=1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X_1=0)+\mathbb{P}(X_1=0)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \end{aligned}$$

(b). Toujours en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3=2) &= \mathbb{P}_{[I_3=1]}(X_3=2)\,\mathbb{P}(I_3=1) + \mathbb{P}_{[I_3=2]}(X_3=2)\,\mathbb{P}(I_3=2) + \mathbb{P}_{[I_3=3]}(X \\ &= \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(3-1+X_{3-1}=2) + \mathbb{P}(3-1+Z-3,2+T_{3,2}=2) + \mathbb{P}(3-1 \right. \\ &= \frac{1}{3}\left(\underbrace{\mathbb{P}(X_2=0)}_{0} + \mathbb{P}(Z_{3,2}+T_{3,2}=0) + \underbrace{\mathbb{P}(X_2=0)}_{0}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_{3,2}+T_{3,2}=0) \end{aligned}$$

Or $Z_{3,2}$ suit la même loi que $X_{2-1}=X_1$ et $T_{3,2}$ suit la même loi que $X_{3-2}=X_1$, et comme X_1 est la variable aléatoire constante égale à 0, on en déduit que $Z_{3,2}+T_{3,2}$ est une variabkle aléatoire presque sûrement constante égale à 0, donc $\mathbb{P}(Z_{3,2}+T_{3,2}=0)=1$, et par suite $\mathbb{P}(X_3=2)=\dfrac{1}{3}$.

Sur le même principe, on montre que :

$$\mathbb{P}(X_3=3) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\mathbb{P}(X_2=1)}_{1} + \underbrace{\mathbb{P}(Z_{3,2}+T_{3,2}=1)}_{0} + \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1)}_{1}\right) = \frac{2}{3}$$

Par suite, on trouve que $E(X_3) = 2\times\dfrac{1}{3} + 3\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

(3). *A priori*, X_4 devrait être une variable aléatoire discrète. Soit alors $k\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_4=k) &= \mathbb{P}(I_4=1)\,\mathbb{P}_{[I_4=1]}(X_4=k) + \mathbb{P}(I_4=2)\,\mathbb{P}_{[I_4=2]}(X_4=k) + \mathbb{P}(I_4=3)\,\mathbb{P}_{[I_4=3]}(X_4 = \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{P}(4-1+X_{4-1}=k) + \mathbb{P}(4-1+Z_{4,2}+T_{4,2}=k) + \mathbb{P}(4-1+Z_{4,3}+T_{4,3}=k \right. \\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathbb{P}(X_3=k-3) + \mathbb{P}(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3) + \mathbb{P}(Z_{4,3}+T_{4,3}=k-3)\right) \end{aligned}$$

Comme $\begin{cases} Z_{4,2} \text{ a la même loi que } X_1 \\ T_{4,2} \text{ a la même loi que } X_2 \\ Z_{4,3} \text{ a la même loi que } X_2 \\ T_{4,3} \text{ a la même loi que } X_1 \end{cases}$, les variables aléatoires $Z_{4,2}+T_{4,2}$ et $Z_{4,3}+T_{4,3}$ ont même loi, X_2 puisque $X_1=0$. Ainsi, $Z_{4,2}+T_{4,2}$ et $Z_{4,3}+T_{4,3}$ sont presques sûrement égales à 1, et par conséquent :

$$\mathbb{P}(Z_{4,2}+T_{4,2}=k-3) = \mathbb{P}(Z_{4,3}+T_{4,3}=k-3) = \begin{cases} 0 \text{ si } k-3\neq 1 \\ 1 \text{ si } k-3=1 \text{ soit } k=4 \end{cases}$$

De plus, on a : $\mathbb{P}(X_3=k-3) = \begin{cases} 0 \text{ si } k-3\notin\{2,3\} \\ \dfrac{1}{3} \text{ si } k-3=2 \text{ soit } k=5 \\ \dfrac{2}{3} \text{ si } k-3=3 \text{ soit } k=6 \end{cases}$.

D'où on en conclut que : $\mathbb{P}(X_4=k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k\notin\{4,5,6\} \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } k=4 \\ \dfrac{1}{6} \text{ si } k=5 \\ \dfrac{1}{3} \text{ si } k=6 \end{cases}$, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(X_4=4)=\frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X_4=5)=\frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(X_4=6)=\frac{1}{3}$$

et par suite $E(X_4) = \dfrac{29}{6}$.

(4). Soit $n\geq 3$, posons $\mathcal{P}(n)$:« X_n prend presque sûrement ses valeurs dans $\left[\!\left[0;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$ », et montrons par récurrence forte sur n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 3$.

En fait, ce que l'on va montrer dans les faits, c'est que $\mathbb{P}(X_n=k)=0$ pour tout $k\notin\left[\!\left[0;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$.

— De ce qui précède, on en déduit que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

— Supposons que l'on ait $\mathbb{P}(k)$ jusqu'à un entier $n-1$ avec $n-1\geq 4$, et montrons que, sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n)$.

Soit alors $k\notin\left[\!\left[0;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$.

Alors, sur le même principe que précédemment :

$$\mathbb{P}(X_n=k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{[I_n=i]}(X_n=k)$$

d'où :

$$n\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=k\right)+\sum_{i=2}^{n-12}\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k\right)+\mathbb{P}\left(N-1+\right.$$

$$=\mathbb{P}\left(X_{n-1}=k-n+1\right)+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{P}\left(Z_{n,i}+T_{n,i}=k-n+1\right)+\mathbb{P}\left(X_{n-1}=k-n+1\right)$$

$$=2\mathbb{P}\left(X_{n-1}=k-n+1\right)+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{P}\left(Z_{n,i}+T_{n,i}=k-n+1\right)$$

Par hypothèse de récurrence, X_{n-1} prend ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[0;\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right]\!\right]=\left[\!\left[0;\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}k\right]\!\right]$, et donc $n-1+X_{n-1}$ prend ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[n-1;\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}k+n-1\right]\!\right]=\left[\!\left[n-1;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$, donc comme $k\notin\left[\!\left[0;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$, $k\notin\left[\!\left[n-1;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$ et par suite $\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=k\right)=0$.
$Z_{n,i}$ suit la même loi que X_{i-1} et X_{i-1} prend ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[0;\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}\right]\!\right]$ et $T_{n,i}$ suit la même loi que X_{n-1} et X_{i-1} prend ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[0;\dfrac{(n-i-1)(n-i-2)}{2}\right]\!\right]$.
Ainsi, $Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend ses valeurs dans $\left[\!\left[0;\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}+\dfrac{(n-i)(n-i-1)}{2}\right]\!\right]$, donc $n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[n-1;\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}+\dfrac{(n-i)(n-i-1)}{2}+n-1\right]\!\right]$, et on montre que $\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}+\dfrac{(n-i)(n-i-1)}{2}+n-1\leq\dfrac{n(n-1)}{2}$. Donc $n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}$ prend également ses valeurs presque sûrement dans $\left[\!\left[0;\dfrac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$, et donc $\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k\right)=0$.
Finalement $\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=0$ et on a bien $\mathcal{P}(n)$.

— La propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie aux rangs 1 et 2, et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n.

(5). (a). On sait que $E(X_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}E(X_n|I_n=i)\mathbb{P}\left(I_n=i\right)$. Alors on a pour $n\geq 3$:

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n}E(X_n|I_n=i)\\
&= \frac{1}{n}\left(E(X_n|I_n=1)+E(X_n|I_n=n)+\sum_{i=1}^{n-1}E(X_n|I_n=i)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(E(n-1+X_{n-1})+\sum_{i=2}^{n-1}E(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i})+E(n-1+X_{n-1})\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(2(n-1+E(X_{n-1})+\sum_{i=2}^{n-1}\left(E(Z_{n,i})+E(T_{n,i})+n-1\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(2U_{n-1}+\sum_{i=2}^{n-1}E(X_{i-1})+\sum_{i=2}^{n-i}E(X_{n-1})+2(n-1)+(n-2)(n-1)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(2U_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}U_i+\sum_{i=2}^{n-1}U_{n-i}+n(n-1)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(2U_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}U_i+\sum_{i=1}^{n-2}U_i+n(n-1)\right)\\
&= n-1+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}U_i
\end{aligned}$$

et du fait que $U_2=1$, le résultat est encore valable pour $n=2$.

(b). D'après la dernière question de la **partie B**, on a $U_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2n\ln(n)$.

(6). (a). De la relation :

$$n\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=2\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=k\right)+\sum_{i=2}^{n-1}\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k\right)$$

on tire que :

$$\mathbb{P}\left(X_n=k\right)\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=k\right)=0\\ \quad\text{et}\\ \forall i\in[\![2;n-1]\!]\,,\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=k\right)=0\end{array}\right.$$

On en déduit alors que :

$$\mathbb{P}\left(X_n=\alpha_n\right)\neq 0\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=\alpha_n\right)\neq 0\\ \quad\text{ou}\\ \exists i\in[\![2;n-1]\!]\,,\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=\alpha_n\right)\neq 0\end{array}\right.$$

et étudions ces deux cas :

— Si $\mathbb{P}\left(n-1+X_{n-1}=\alpha_n\right)\neq 0$, aors $\alpha_n-n+1\geq\alpha_{n-1}$, c'est à dire $\alpha_n\geq n-1+\alpha_{n-1}$.

— Il existe $i\in[\![2;n-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}\left(n-1+Z_{n,i}+T_{n,i}=\alpha_n\right)\neq 0$.
En utilisant le système complet d'événements associé à $T_{n,i}$, on en déduit qu'il existe $m\in T_{n,i}(\Omega)$, tel que :

$$\mathbb{P}\left([T_{n,i}=0]\cap[Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-m]\right)\neq 0$$

mais aussi que :

$$\begin{array}{rl} & 0<\mathbb{P}\left([T_{n,i}=0]\cap[Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-m]\right)\leq\mathbb{P}\left(T_{n,i}=m\right)\\ \text{et} & 0<\mathbb{P}\left([T_{n,i}=0]\cap[Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-m]\right)\leq\mathbb{P}\left(Z_{n,i}=\alpha_n-n+1-m\right)\end{array}$$

et alors : $\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n-i} = m) = \mathbb{P}(T_{n,i} = m) \neq 0 \text{ c'est à dire } a \geq \alpha_{n-1I} \\ \text{et} \\ \mathbb{P}(X_{i-1} = \alpha_n - n + 1 - m) = \mathbb{P}(Z_{n,i} = \alpha_n - n + 1 - a) \neq 0 \text{ c'est à dire} \end{cases}$

Ainsi, $\alpha_n \geq n - 1 + m + \alpha_{i-1} \geq n - 1 + \alpha_{n-i} + \alpha_{i-1}$.

En conclusio, α_n est au minimum égal à l'un des nombres $n-1+\alpha_{n-1}$, $n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \dots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1$.

(b). (i). Il suffit de montrer que la dérivée seconde de g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui est direct, pour établir que g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité de convexité appliquée à g sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'écrire :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall \lambda \in [0;1], \qquad g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

qui donne en particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \qquad g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(g(x)+g(y)\right)$$

et il suffit de l'appliquer pour tout $(i,n) \in (\mathbb{N})^2$ avec $2 \leq i \leq n-1$.

(ii). On a directement :

$$\begin{array}{rcl} g(n+1) - g(n) & = & \log_2(n+1) + \dfrac{n}{\ln(2)} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - 2 \\ & = & \log_2(n+1) + \dfrac{n}{\ln(2)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 2 \\ & \underset{\ln(1+x) \leq x}{\leq} & \log_2(n+1) + \dfrac{n}{\ln(2)} \dfrac{1}{n} - 2 \\ & \leq & \log_2(n+1) \end{array}$$

Pour avoir l'autre inégalité, il suffit que l'on ait $\log_2(n+1) \leq n-1$, ce qui est le cas dès lors que $n+1 \leq 2^{n-1}$, c'est à dire lorsque $n \geq 3$, résultat que l'on peut établir soit par récurrence, soit par une étude de fonction.

Pour le cas $n=1$ et $n=2$:

— $g(1+1) - g(1) = \ldots = 0 = 1 - 1$.

— $g(2+1) - g(1) = \ldots = 1 + \log_2(27) + \log_2\left(2^5\right) = 1 - \log_2\left(\dfrac{32}{27}\right) \leq 1 = 2 - 1$.

D'où l'inégalité pour tout entier n.

(c). Soit $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: ´ $\alpha_n \geq (n+1)\log_2(n+1) - 2n$ ˇ.

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Remarquons avant de commencer que $(n+1)\log_2(n+1) - 2n = g(n+1)$.

— Au rang 0 : $X_1 = 0$, donc $\alpha_1 = 0$, et $g(2) = 2\log_2(2) - 2 = 0$, donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Supposons que l'on a la propriété $\mathcal{P}(k)$ jusqu'au rang $n-1$ avec $n \geq 2$, et montrons que sous cette hypothèse, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$.

On a montré que :

$$\alpha_n \geq \min\left(n-1+\alpha_{n-1}, n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \ldots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1\right)$$

On a : $n-1+\alpha_{n-1} \geq n-1+g(n)$ et pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, $n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \geq n-1+g(i)+g(n-i+1)$.

Or $g(n+1) - g(n) \leq n-1$, donc $n-1+g(n) \geq g(n+1)$, et par conséquent $n-1+\alpha_{n-1} \geq g(n+1)$.

Par ailleurs, pour $i \in [\![2; n-1]\!]$:

$$n-1+\alpha_{i-1}+\alpha_{n-i} \geq n-1+g(i)+g(n-i+1) \geq n-1+2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

On a aussi :

$$\begin{array}{rcl} n-1+2g\left(\dfrac{n+1}{2}\right) & = & n-1+2\left(\dfrac{n+1}{2}\log_2\left(\dfrac{n+1}{2}\right) - 2 \times \dfrac{n+1}{2} + 2\right) \\ & = & n-1+(n+1)\left(\log_2(n+1) - \log_2(2)\right) - 2n + 2 \\ & = & (n+1)\log_2(n+1) + n - 1 - (n+1)\log_2(2) - 2n + 2 \\ & = & (n+1)\log_2(n+1) + n - 1 - n - 1 - 2n + 2 \\ & = & (n+1)\log_2(n+1) - 2n \\ & = & g(n+1) \end{array}$$

Donc $n-1+\alpha_{i-1}\alpha_{n-i} \geq g(n+1)$. Par suite :

$$\alpha_n \geq \min\left(n-1+\alpha_{n-1}, n-1+\alpha_1+\alpha_{n-2}, n-1+\alpha_2+\alpha_{n-3}, \ldots, n-1+\alpha_{n-2}+\alpha_1\right) \geq g$$

et on a ainsi $\mathcal{P}(n)$.

— La propriété $\mathbb{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n.