Exercice| [5066] | 1| Estimation | ESCP 2011 Filière ECS

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ admettant une variance et dont l'espérance $E(X) = \lambda$ est un paramètre réel inconnu.
Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon *i.i.d.* de la loi de X.
On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
On note S_λ l'ensemble des statistiques $U_n = g_n(X_1, \ldots, X_n)$ où g_n est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qui sont des estimateurs sans biais de λ et qui admettent une variance notée V.
On admet la propriété $\mathcal{P}$ suivante :

$$\text{Pour tout } U_n \text{ de } S_\lambda, \text{ on a : } \qquad \mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, U_n - \overline{X_n}\right) = 0$$

On dit qu'un élément Z_n de S_λ est un estimateur optimal dans S_λ si pour tout U_n de S_λ, on a $v(Z_n) \leq v(U_n)$.

(1). Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur optimal dans S_λ.

(2). Soit Z_n un estimateur optimal dans S_λ. Pour α réel et U_n de S_λ, on pose :

$$W_n(\alpha) = \alpha U_n + (1-\alpha) Z_n$$

(a). Montrer que, pour tout α réel, $W_n(\alpha)$ est élément de S_λ.

(b). Calculer $v(W_n(\alpha))$. En déduire que $\mathrm{Cov}\,(Z_n,\, U_n - Z_n) = 0$.

(c). Montrer que $Z_n = \overline{X_n}$ presque sûrement.

(3). On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on admet que la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée. Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$T_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

(a). Montrer que T_n est un estimateur sans biais de λ.

(b). On admet sans démonstration l'existence de $v(T_n)$.

Montrer que $\mathrm{Cov}\left(T_n,\, \overline{X_n}\right) = \dfrac{\lambda}{n}$.

Éléments de correction

(1). $\overline{X_n}$ s'écrit comme une fonction de $X_1, \ldots, X_n$. C'est donc un estimateur. De plus, $\overline{X_n}$ admet une variance égale à λ et une variable, ce qui entraîne que $\overline{X_n}$ appartient à S_λ.
Par la propriété $\mathcal{P}$, on a : $\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, U_n\right) = v\left(\overline{X_n}\right)$. La bilinéarité de la variance, permet d'obtenir $\left|\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, U_n\right)\right|^2 \leq v\left(\overline{X_n}\right) v(U_n)$, et donc $v\left(\overline{X_n}\right) \leq v(U_n)$, ce qui montre que $\overline{X_n}$ est optimal.

(2). (a). L'espérance étant linéaire, et U et V ayant un moment d'ordre 2, $\mathrm{Cov}\,(U,\, V)$ existe.

(b). On a par propriété de la variance :

$$v\left(W_n(\alpha)\right) = \alpha^2 v(U_n) + \left(1-\alpha^2\right) v(Z_n) + 2\alpha(1-\alpha)\mathrm{Cov}\,(U_n,\, Z_n) = \alpha^2 v(U_n - V_n) - 2\alpha\left(v(Z_n) - \mathrm{Cov}\,(U_n,\, Z_n)\right) + v(Z_n)$$

Or Z_n étant optimal, il vient, pour tout réel α :

$$\alpha^2 v(U_n - Z_n) = 2\alpha\left(v(Z_n) - \mathrm{Cov}\,(U_n,\, Z_n)\right) \geq 0$$

Ce trinôme du second degré en α restant positif ou nul, son discriminant est négatif, soit $\left(v(Z_n) - \mathrm{Cov}\,(U_n,\, Z_n)\right)^2 \leq 0$, donc $v(Z_n) = \mathrm{Cov}\,(U_n,\, Z_n)$ ou encore $\mathrm{Cov}\,(Z_n,\, U_n - Z_n) = 0$.

(c). On écrit $Z_n : \overline{X_n} + \left(Z_n - \overline{X_n}\right)$, ce qui entraine que :

$$v(Z_n) = v\left(\overline{X_n}\right) + v\left(Z_n - \overline{X_n}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, Z_n - \overline{X_n}\right)$$

Comme Z_n et $\overline{X_n}$ sont optimaux, il vient $v\left(Z_n - \overline{X_n}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, Z_n - \overline{X_n}\right) = 0$, et toujours par optimalité de $\overline{X_n}$, $\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, Z_n - \overline{X_n}\right) = 0$.
Finalement, $v\left(Z_n - \overline{X_n}\right) = 0$ et $Z_n - \overline{X_n}$ est presque sûrement constante, et ici nulle.

(3). (a). En écrivant $X_i = \overline{X_n} = (X_i - \lambda) + \left(\lambda - \overline{X_n}\right)$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda)^2 + n\left(\overline{X_n} - \lambda\right)^2 - 2n\left(\overline{X_n} - \lambda\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda)^2 - n\left(\overline{X_n} - \lambda\right)^2$$

En prenant alors les espérances, on en déduit :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} v(X_i) - nv\left(\overline{X_n}\right) = (n-1)\lambda$$

Par suite $E(T_n) = \lambda$, et T_n est un estimateur sans biais de λ.

(b). Comme T_n admet une variance, il appartient à S_λ, et par la propriété $\mathcal{P}$ et $T_n \neq \overline{X_n}$, il vient $\mathrm{Cov}\left(\overline{X_n},\, T_n - \overline{X_n}\right) = 0$, donc $\mathrm{Cov}\left(T_n,\, \overline{X_n}\right) = \dfrac{\lambda}{n}$.