Exercice| [5065] | 1| Moyennes de Césaro | ESCP 2010 Filière ECS

(1). On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(a). Écrire la définition mathématique de la convergence de la suite (a_n) vers ℓ.

(b). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

(c). En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

(2). Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad n \geq 1,\ u_{n+1} = \sin(u_n)$$

(a). Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

(b). Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}\right)$ existe et est un réel non nul.

(c). Quelle est la nature de la série de terme général u_n ? On pourra pour cela utiliser le résultat de la question **(1)** appliquée à une suite construite à l'aide de la question **(2)(b)**.

Éléments de correction

(1). (a). On dit que $(a_n)_{n\geq 0}$ a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_0,\ |a_k - \ell| \leq \varepsilon$$

que l'on peut aussi écrire (pour la suite) : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_0,\ |a_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(b). Soit alors $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ en $+\infty$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq n_0$, on a $|a_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \frac{n}{n}\ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-\ell)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_k-\ell)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|a_k-\ell| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

(c). Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)}_{\text{constante}} = 0$, on en déduit qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k-\ell)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par suite, en posant $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, on a donc, pour tout $n \geq n_2$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2,\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\right| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ est convergente et de limite ℓ.

(2). (a). On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui montre que $u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, puisque, pour tout réel $x > 0$, on a $\sin(x) \leq x$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente. En notant ℓ sans limite, on a $\ell = \sin(\ell)$, ce qui donne $\ell = 0$.

(b). Un développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0 donne :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right)$$

Donc : $u_{n+1}^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(1 + \frac{\alpha u_n^2}{6} + o\left(Uu_n^2\right)\right)$, et finalement :

$$\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{6}u_n^{2-\alpha}$$

Cet équivalent est de limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = 2$, et dans ce cas, la limite vaut $\frac{1}{3}$.

(3). On utilise le résultat de la question **(1).** : la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de terme généra $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Ainsi, par téléscopage, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = 0$, et donc que $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, soit $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ et par positivité, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.