Exercice| [5063] | 1| Stabilité d'une loi | HEC|ESSEC 2004 Filère ECS

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de *stabilité*, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

— Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires est *une suite de copies de* X si $(X_K)_{k\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes ayant toutes même loi que X.

— On dit d'une variable aléatoire réelle X suit une *loi stable* si il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de copies de X et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $X_1 + \ldots + X_n$ et $a_n X$ ont la même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ si X n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n\geq 1}$ est la *suite associée* à la loi de X.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.
On admettra que :

$$\forall A > 0, \qquad \arctan(A) + \arctan\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression $\arctan$ désigne la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie A - Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

— pour tout couple d'entiers $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{mn} = u_m u_n$.

— il existe un réel strictement positif A tel que, pour tout couple $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $m \leq n$, alors $u_m \leq A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif α tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

(1). Montrer que $u_1 = 1$.

(2). Montrer que, pour tout couple $(r,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.

(3). Soit $r \in \mathbb{N}^*$, avec $r \geq 2$. Montrer qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k, où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$.
Exprimer α_r en fonction de r et de u_r.

(4). Soit $(r_1, r_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $r_2 > r_1 \geq 2$. On introduit alors les réels α_{r_1} et α_{r_2} définis selon la question précédente.

(a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier ℓ tel que $r_2^k \leq r_1^\ell < r_2^{k+1}$.

(b). En déduire que $(r_2)^{\alpha_{r_2}} \leq A\left(r_2^{k+1}\right)^{\alpha_{r_1}}$ et $\left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_1}} \leq A\left(r_2^{k+1}\right)^{\alpha_{r_2}}$.

(c). En faisant tendre k vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

Partie B - La loi gaussienne

(1). On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2.

$$f_{m,\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

(a). Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques.
Trouver trois réels α, m et σ que l'on exprimera en fonction de a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

(b). En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

(c). Soient G et G' deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variances respectives σ^2 et σ'^2.
Redémontrer en calculant la densité de la loi de $G + G'$, que $G + G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

(d). Montrer que G suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de G ?

(2). Dans cette question X est une variable aléatoire qui suit une loi stable et qui admet une espérance m et une variance σ^2 strictement positive. On ne suppose pas que X suit une loi gaussienne.
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k\geq 1}$ la suite associée à la loi de X.

(a). En considérant les variances de $X_1 + \ldots + X_n$ et de $a_n X$, donner, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de a_n. Montrer que $m = 0$.

(b). En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi gaussienne.

Éléments de correction

[fac]

Partie A - Un résultat sur certaines suites positives

(1). On a $u_1 = u_{1\times 1} = u_1 u_1$ donc $u_1 = u_1^2$ donc $u_1 = 0$ ou $u_1 = 1$, et comme $u_1 > 0$, on a $u_1 = 1$.

(2). Soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: « $u_{r^k} = u_r^k$ », et on va montrer par récurrence sur k que la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq 0$.

- Pour $k = 0$, on a $u_{r^0} = u_1 = 1 = u_r^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que l'on ait la propriété $\mathcal{P}(k)$ pour un entier $k \geq 0$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(k+1)$.
  On a $u_{r^{k+1}} = u_{r^k} u_r = (u_r)^k \times u_r = (u_r)^{k+1}$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.
- la propriété $\mathcal{P}(k)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $k \geq 0$.

(3). Raisonnons par analyse/synthèse.

- **Analyse :** supposons qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{r^k} = \left(r^k\right)^{\alpha_r}$. Alors $u_r = r^{\alpha_r}$, donc $\ln(u_r) = \alpha_r \ln(r)$ ce qui donne $\alpha_r = \dfrac{\ln(u_r)}{\ln(r)}$ tout étant strictement positif pour prendre le logarithme.
- **Synthèse :** on pose $\alpha_r = \dfrac{\ln(u_r)}{\ln(r)}$. Alors on a bien $u_r = r^{\alpha_r}$, d'où l'existence et la valeur de α_r.

(4). (a). La suite géométrique $\left(r_1^n\right)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ puisque de raison strictement supérieure à 1, il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$, $r_2^k \leq r_1^n$. On considère alors ℓ le plus petit entier n_0 qui satisfait à cela (il existe !). On a alors $r_2^k \leq r_1^\ell$.
Par définition de ℓ, on a $r_1^{\ell-1} < r_2^k$ (même si $\ell = 1$), et par suite, $r_1^{\ell-1} \times r_1 < r_2^k \times r_1 < r_2^k \times r_2 = r_2^{k+1}$.

(b).
- De $r_2^k \leq r_1^\ell$, on tire que $u_{r_2^k} \leq A u_{r_1^\ell}$ ce qui donne $\left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_2}} \leq A\left(r_1^\ell\right)^{\alpha_{r_1}} \leq A\left(r_2^{k+1}\right)^{\alpha_{r_2}}$.
- De $r_2^k \leq r_1^\ell$, on tire que $u_{r_2^k} \leq A u_{r_1^\ell}$ ce qui donne $\left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_1}} \leq A\left(r_1^\ell\right)^{\alpha_{r_1}} \leq A\left(r_2^{k+1}\right)^{\alpha_{r_1}}$.

étant entendu que ceci n'est valable que si α_{r_1} et α_{r_2} sont strictement positifs. Ce qui est le cas, car sinon, de la relation $u_r \leq A u_{r^k}$ que l'on a car $r \leq r^k$ pour $k \geq 1$, on tirerait que $0 \leq u_r \leq A\left(r^k\right)^{\alpha_r} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $u_r = 0$, ce qui est contraite à l'hypothèse faite sur la stricte positivité des termes de la suite.

(c). Si $\alpha_{r_1} \neq \alpha_{r_2}$, quitte à supposer $\alpha_{r_1} > \alpha_{r_2}$, la deuxième inégalité de la question précédente permet $\left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_1}} \times \left(r_2^{k+1}\right)^{-\alpha_{r_2}} \leq A$ ce qui donne $(r_2)^{-\alpha_{r_2}} \times \left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}} \leq A$.
Or $(r_2)^{-\alpha_{r_2}} \times \left(r_2^{k+1}\right)^{-\alpha_{r_1}} = r_2^{-\alpha_{r_2}} \times \left(r_2^k\right)^{\alpha_{r_1}-\alpha_{r_2}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $r_2 > 1$ et $\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2} > 0$, ce qui est impossible car ma quantité $(r_2)^{\alpha_{r_2}} \times \left(r_2^{k+1}\right)^{-\alpha_{r_1}}$ est majorée par A.
Par suite $\alpha_{r_1} \leq \alpha_{r_2}$. En supposant maintenant que $\alpha_{r_1} < \alpha_{r_2}$, à partir de la deuxième inégalité de la question précédente, on montrerait que ce n'est pas possible, et donc que $\alpha_{r_1} \geq \alpha_{r_2}$ ce qui donnera l'égalité.
Par conséquent, la suite (α_r) ainsi construite est constante égale à $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^\alpha$.

Partie B - La loi gaussienne

(1). (a). Il suffit de faire la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2 pour obtenir :

$$\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c \text{ avec } \begin{cases} \alpha = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \\ m = -\dfrac{b}{2a} \\ \sigma = \sqrt{\dfrac{1}{2a}} \end{cases}$$

(b). On sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 comme densité de probabilité d'une loi $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$. En définissant α, m et σ comme dans la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\mathrm{e}^{-\alpha}\sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

(c). On note f et g les densités respectives de G et G', c'est à dire $f = f_{0,\sigma^2}$ et $g = f_{0,\sigma'^2}$.
Les deux variables aléatoires G et G' étant indépendantes à densité, une densité h, sous réserve que cela ait du sens en terme de convergence d'intégrale, de la variable aléatoire $G + G'$ sera obtenue à l'aide du produit de convolution ci-dessous :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Or $f(t)g(x-t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)t^2+\left(-\frac{x}{\sigma'^2}t+\frac{x^2}{2\sigma'^2}\right)}$.

ce qui donne une intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ convergente d'après la question précédente, et de valeur :

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}}}\,\mathrm{e}^{\frac{\left(-\frac{x}{\sigma'^2}\right)^2-\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)\left(\frac{x^2}{2\sigma'^2}\right)}{4\left(\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma'^2}\right)}}$$

ce qui peut se reécrire (à faire) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\left(\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}\right)^2}}$$

qui est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2+\sigma'^2\right)$.

(d). On considère la suite $(G_k)_{k\geq 1}$ où $G_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$. On a $G_1 + \ldots + G_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, n\sigma^2\right)$, et $\sqrt{n}G \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, n\sigma^2\right)$ donc G suit une loi stable et la suite associée à cette loi est $\left(\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$.

(2). Par indépendance de $(X_1, \ldots, X_n)$, on a $v\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n v(X_i) = n\sigma^2$ et comme $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ a même loi que $a_n X$, on en déduit que $n\sigma^2 = v(a_n X) = a_n^2 v(X) = a_n\sigma^2$, et par suite $a_n = \sqrt{n}$.
Sur le même principe, on a $X_1 + X_2$ et $a_2 X$ qui ont même loi. On peut alors écrire $E(X_1+X_2) = E\left(\sqrt{2}X\right)$ et par suite $2m = m\sqrt{2}$ soit $m = 0$.

(3). En posant $S_n = X_1 + \dots X_n$, le théorème de la limite centrée permet d'affirmer que $\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{v(S_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

On a ici $E(S_n) = m\sqrt{n}$ et $v(S_n) = n\sigma^2$, donc $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{v(S_n)}} = \dfrac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$. Or S_n a même loi que $\sqrt{n}X$, donc $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{v(S_n)}}$ a même loi que $\dfrac{X}{\sigma}$, ces deux variables ayant alors la même fonction de répartition. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{v(S_n)}} \leq x\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{X}{\sigma} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X}{\sigma} \leq x\right)$ et donc $\dfrac{X}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.