Exercice| [5060] | 1| Étude d'un modèle linéaire | HEC|ESSEC 2005 Filière ECS

Dans tout ce problème, n et r désignent des entiers strictement positifs. On note $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et r colonnes à coefficients réels. Pour $n=r$, on pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La transposée d'une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$. On pourra également la noter A^T.
On étudie dans ce problème, quelques propriétés du *modèle linéaire*, qui constitue l'instrument de base de l'économétrie.
Pour tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de* M, notée $\operatorname{tr}(M)$, somme de ses coefficients diagonaux ; ainsi, si $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
On admet les trois résultats suivants :

- l'application tr qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe sa trace, est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$;
- si A est une matrice de $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, et B une matrice de $\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
- Si M et N sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N)$.

(1). Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possédant q valeurs propres $(1 \leq q \leq n)$ notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. Pour tout entier $i \in [\![1;q]\!]$, on désigne par n_i la dimension du sous-espace propre associée à la valeur propre λ_i.

(a). On suppose que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{q} n_i\lambda_i$.

(b). On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Montrer les égalités suivantes :

$$\operatorname{tr}\left({}^tMM\right) = \operatorname{tr}\left(M^2\right) = \sum_{i=1}^{q} n_i\lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$$

(2). Pour tout entier $i \in [\![1;n]\!]$ et pour tout entier $j \in [\![1;r]\!]$, on considère les variables aléatoires réelles $Z_{i,j}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On définit la *matrice aléatoire* Z, à n lignes et r colonnes, en associant à tout ω de Ω, la matrice :

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \ldots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \ldots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix} = \left(Z_{i,j}(\omega)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$$

On suppose que les nr variables aléatoires $Z_{i,j}$ admettent une espérance $E(Z_{i,j})$, et on définit l'*espérance de la matrice* Z, notée $E(Z)$, comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les espérances $E\left(Z_{i,j}\right)$, soit $E(Z) = \left(E\left(Z_{i,j}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq r}}$.

Si Z et W sont deux matrices aléatoires à n lignes et r colonnes admettant chacune une espérance, et si λ est un réel, on remarquera que $E(\lambda Z + W) = \lambda E(Z) + E(W)$.

Dans le cas où $n=r$, on appelle *trace de* Z, notée $\operatorname{tr}(Z)$, la variable aléatoire définie par $\operatorname{tr}(Z) = \sum_{i=1}^{n} Z_{i,i}$ et si $n=r=1$, la matrice aléatoire coincide avec la variable aléatoire Z, et on a $\operatorname{tr}(Z) = Z$.

Dans le cas où $r=1$ et n est quelconque, si $T = {}^t\left(T_1 \ \ldots \ T_n\right)$, et $W = {}^t\left(W_1 \ \ldots \ W_n\right)$ sont deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$, et si λ est un réel quelconque, on définit le vecteur aléatoire $\lambda T + W$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\lambda T + W = {}^t\left(\lambda T_1 + W_1 \ \ldots \ \lambda T_n + W_n\right)$$

(a). Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes admettant une espérance $E(Z)$.

(i). On considère une matrice A de $\mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $E(AZ) = AE(Z)$.

(ii). Soit B un élément de $\mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{R})$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(ZB) = E(Z)B$.

(b). Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes admettant une espérance $E(Z)$. Établir les deux égalités :

$$E\left({}^tZ\right) = {}^t\left(E(Z)\right) \qquad \text{et} \qquad E(\operatorname{tr}(Z)) = \operatorname{tr}(E(Z))$$

(3). Dans cette question, Y désigne un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, noté $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, admettant une espérance $E(Y)$, et une matrice de variance-covariance notée $v(Y)$.
On rappelle que $v(Y) = E\left((Y - E(Y)) \times {}^t(Y - E(Y))\right)$.
On admet que la définition et les propriétés de la matrice de variance-covariance $v(Y)$ d'un vecteur aléatoire discret restent valables pour un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires quelconques (discrètes ou à densité).
Ainsi, en supposant que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire Y_iY_j possède un moment d'ordre 1 au moins, on définit la covariance de Y_i et Y_j par $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j)$, et si Y_i et Y_j sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

(a). Montrer que, pour tout vecteur aléatoire Y de $\mathbb{R}^n$, $v(Y) = E\left(Y\,{}^tY\right) - E(Y)E\left({}^tY\right)$.

(b). Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'égalité $v(BY) = BV(Y){}^tB$.

(c). Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $m = E(Y)$ et $J = v(Y)$. Établir les égalités :

$$E\left({}^tYAY\right) = \operatorname{tr}\left(A\,E\left(Y\,{}^tY\right)\right) \qquad \text{et} \qquad E\left({}^tYAY\right) = \operatorname{tr}(AJ) + {}^tmAm$$

Éléments de correction

[fac]

(1). (a). La matrice M étant diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale D dont la diagonale est formée des q valeurs propres de M, répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé. Compte-tenu des notations retenues ici, la valeur propre λ_i de M est donc écrite n_i fois sur la diagonale de D. Comme M et D sont semblables, on a $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{q} n_i\lambda_i$.

(b). Puisque M est symétrique, il est immédiat que $\operatorname{tr}\left({}^tMM\right) = \operatorname{tr}\left(M^2\right)$ du fait que ${}^tM = M$.
On a par ailleurs l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}MP$, ce qui assure que $M^2 = PD^2P^{-1}$, c'est à dire que M^2 est semblable à une matrice diagonale qui compte sur sa diagonale les termes λ_i^2 présents n_i fois, et par suite $\operatorname{tr}\left(M^2\right) = \sum_{i=1}^{q} n_i\lambda_i^2$.
Ensuite, en notant $M^2 = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, le terme d'indice (i,i) de M^2 sera :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,i} \underset{{}^tM=M}{=} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j}^2$$

ce qui donnera bien $\operatorname{tr}\left(M^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$.

(2). (a). (i). On note $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\1\le j\le n}}$.

On note $AZ=(b_{i,j})_{1,\le i,j\le n}$. Alors, pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$, $b_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}Z_{k,j}$, $b_{i,j}$ étant une variable aléatoire.

Par définition de $E(AZ)$, on doit s'intéresser à l'existence de $E(b_{i,j})$, ce qui est assuré par la linéarité de l'espérance et l'existence des espérances des $Z_{k,j}$. On en déduit alors que :

$$E(AZ)=(c_{i,j})_{1\le i,j\le n}\qquad\text{où}\qquad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}E\left(Z_{j,k}\right)$$

Or le terme général $d_{i,j}$ de la matrice $A\times E(Z)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est égal à :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\qquad d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\left(E(Z)\right)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}E\left(Z_{k,j}\right)$$

ce qui donne $E(AZ)=AE(Z)$.

(ii). Même raisonnement.

(b). Le terme général de la matrice ${}^tZ\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est $Z_{j,i}$, donc admet une espérance, et par suite $E\left({}^tZ\right)$ existe, et par définition $E\left({}^tZ\right)=\left(E\left(Z_{j,i}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$, et on a clairement ${}^tE(Z)={}^t\left(\left(E\left(Z_{i,j}\right)\right)_{1\le i,j\le n}\right)=\left(E\left(Z_{j,i}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$, d'où $E\left({}^tZ\right)={}^tE(Z)$.

Par définition de la trace, $\operatorname{tr}(Z)=\sum_{i=1}^{n}Z_{i,i}$, donc $E(\operatorname{tr}(Z))=\sum_{i=1}^{n}E(Z_{i,i})$ par linéarité de l'espérance. On a par définition de $E(Z)$, que $E(Z)=(E(Z_{i,j}))_{1\le i,j\le n}$, donc $\operatorname{tr}(E(Z))=\sum_{i=1}^{n}E(Z_{i,i})$, d'où l'égalité demandée.

(3). (a). On a :

$$\begin{aligned}
v(Y) &= E\left((Y-E(Y))\times{}^t(Y-E(Y))\right)\\
&\underset{\substack{\textbf{propriété de}\\ la transposition}}{=} E\left(Y-E(Y)\right)\times\left({}^tY-{}^tE(Y)\right)\\
&= E\left(Y{}^tY-Y{}^tE(Y)-E(Y){}^tY+E(Y){}^tE(Y)\right)\\
&\underset{\textbf{linéarité}}{=} E\left(Y{}^tY\right)-E\left(Y{}^tE(Y)\right)-E\left(E(Y){}^tY\right)+E\left(E(Y){}^tE(Y)\right)\\
&\underset{\substack{\textbf{E(AZ)=AE(Z)}\\ E(BZ)=E(B)Z}}{=} E\left(Y{}^tY\right)-E(Y){}^tE(Y)-E(Y)E\left({}^tY\right)+E(Y){}^tE(Y)\\
&\underset{\substack{E({}^tZ)={}^t(E(Z))\ \textbf{en étendant}\\ \textbf{le résultat aux matrices colonnes}}}{=} E\left(Y{}^tY\right)-E(Y)E\left({}^tY\right)
\end{aligned}$$

(b). On a :

$$\begin{aligned}
v(BY) &= E\left(BY{}^t(BY)\right)-E(BY)E\left({}^t(BY)\right)\\
&= E\left(BY{}^tY{}^tB\right)-BE(Y)E\left({}^tYt^B\right)\\
&= BE\left(Y{}^tY{}^tB\right)-BE(Y)E\left({}^tY\right){}^tB\\
&= BE\left(Y{}^tY\right){}^tB-BE(Y)E\left({}^tY\right){}^tB\\
&= Bv(Y){}^tB
\end{aligned}$$

(c). En s'inspirant des formules du produit scalaire, on montre que ${}^tYAY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}Y_iY_j$, donc par linéarité de l'espérance, $E\left({}^tYAY\right)$ existe, et vaut donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\left(Y_iY_j\right)$.

En procédant comme en **(1)(a)(i)/(ii)**, on montre que le terme général de la matrice $AE\left(Y{}^tY\right)$ est $\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}E\left(Y_kY_j\right)\right)_{1\le i,j\le n}$, d'où la première égalité en prenant la trace.

Pour la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
E\left({}^tYAY\right) &= \operatorname{tr}\left(AE\left(Y{}^tY\right)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(A\left(v(Y)+E(Y)E\left({}^tY\right)\right)\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(AJ+AE(Y)E\left({}^tY\right)\right)\\
&= \operatorname{tr}(AJ)+\operatorname{tr}\left(AE(Y)E\left({}^tY\right)\right)\\
&\underset{\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)}{=} \operatorname{tr}(AJ)+\operatorname{tr}\left({}^tE(Y)\left(AE(Y)\right)\right)\\
&= \operatorname{tr}(AJ)+{}^t mAm
\end{aligned}$$