## Exercice| [5055] | 1| Suite de variables aléatoires | HEC|ESSEC 2009 Filière ECS

$N$ désigne un entier supérieur ou égal à 1. On note $E(X)$ et $v(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles existent, de toute variable aléatoire réelle $X$ définie sur un espace probabilisé.
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatories défines sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[1;N]$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sup(U_1, \ldots, U_n)$ et $Z_n = \text{Inf}(U_1, \ldots, U_n)$. On admet que $T_n$et $Z_n$ sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$T_n(\omega) = \max(U_1(\omega), \ldots, U_n(\omega)) \qquad \text{et} \qquad Z_n(\omega) = \min(U_1(\omega), \ldots, U_n(\omega))$$

On rappelle que si $C$ désigne un élément de $\mathcal{F}$, on note $1_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $C$ définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , par : $1_c(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in C \\ 0 \text{ si } \omega \notin C \end{cases}$ .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\qquad d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geq 1 \\ 0 \text{ si } N = 1 \end{cases}$ .

**(1).** Soit $Y$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $[\![1;N]\!]$. Établir les deux relations suivantes :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k) \qquad \text{et } E\left(Y^2\right) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}(Y > k)$$

**(2).** Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $E(U_1)$ et $v(U_1)$.

**(3). (a).** Calculer, pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}(T_n \leq k)$.

**(b).** En déduire la loi de probabilité de $T_n$.

**(4). (a).** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

**(b).** Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $N$ et $d_n(N)$. En déduire la lvaleur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(T_n)$.

**(c).** Établir la formule suivante : $\quad v(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - (d_n(N))^2$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v(T_n)$.

**(d).** Montrer que si $N \geq 2$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}$. En déduire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on a : $v(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

**(5).** Déterminer la loi de $Z_n$. Calculer $E(Z_n)$ et $v(Z_n)$.

**(6).** On rappelle que la fonction **Pascal** `random(N)` permet de simuler un variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![1;N-1]\!]$. Écrire une fonction `Pascal`, d'entête `simulmax(n:integer):integer`, qui simule la variable aléatoire $T_n$.

## Éléments de correction

**(1).** $Y$ étant une variable aléatoire discrète à support fini $[\![1;N]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k)) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y > k-1) \sum_{k=0}^{N-1} k\mathbb{P}(Y > k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\mathbb{P}(Y > k) - \sum_{k=0}^{N-1} k\mathbb{P}(Y > k) \end{aligned}$$

et donc $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(Y > k)$.

Le théorème de transfert donne sur le même principe :

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= \sum_{k=1}^{N} k^2\mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k^2 (\mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k)) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k^2\mathbb{P}(Y > k-1) - \sum_{k=0}^{N-1} k^2\mathbb{P}(Y > k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2\mathbb{P}(Y > k) - \sum_{k=0}^{N-1} k^2\mathbb{P}(Y > k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(k^2 + 2k + 1 - k^2\right)\mathbb{P}(Y > k) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}(Y > k) \end{aligned}$$

**(2).** On a pour une loi uniforme $E(U_1) = \dfrac{N+1}{2}$ et $v(U_1) = \dfrac{N^2-1}{12}$.

**(3). (a).** Soit $k \in [\![1;N]\!]$. On a $\mathbb{P}(T_n \leq k) = \mathbb{P}(\sup(U_1, \ldots, U_n) \leq k) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [U_i \leq k]\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i \leq k)$ car $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont indépendants. D'où $\mathbb{P}(T_n \leq k) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^N$, relation encore vraie pour $k = 0$.

**(b).** Il esst clair que $T_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$, et comme pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n \leq k-1) - \mathbb{P}(T_n \leq k-1) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

**(4). (a).** On a $d_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n(1) = 0$.

Soit alors $N \geq 2$. Dans ce cas, $d_n(N)$ est une somme finie de $N-1$ dont chaque terme $\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$ est tel que $\left|\dfrac{k}{N}\right| < 1$ pour tout $k \in [\![1;N-1]\!]$, et par suite, qui ont tous pour limite 0 en $+\infty$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$.

**(b).** Pour $N \geq 2$, comme $T_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$, on peut lui appliquer les résultats de la première question et obtenir ainsi :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - \mathbb{P}(T_n \leq k)) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = N - d_n(N)$$

et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N$, et ce résultat est encore valable pour $N = 1$.

**(c).** Soit $N \geq 2$. Là encore on utilise les résultats de la question **(1)**.

$$\begin{aligned}
E\left(T_n^2\right) &= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\mathbb{P}\left(T_n > k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(1-\mathbb{P}\left(T_n \leq k\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) - \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N^2 - 2N\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N^2 - 2Nd_{n+1}(N) - d_n(N)
\end{aligned}$$

D'où $v(T-n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - (d_n(N))^2$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v(T_n) = 0$.

**(d).** Pour $N \geq 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d_n(N) = \sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N-1}\right)^n$. Comme à la question **(4)(a)**, tous les termes de cette dernière somme tendent vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$, sauf celui d'indice $N-1$ qui vaut 1. Par suite on en déduit que $d_n(N) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, ce qui donne ensuite que $\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{N-1}{N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{N}$.

Par suite $\frac{v(T_n)}{d_n(N)} = 2N - 1 - 2N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n^2(N) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où l'équivalent demandé.

**(5).** On peut remarquer qu'il y a un lien entre le minimum et le maximum qui est : $Z_n = N + 1 - T_n$ et on montre que $\mathbb{P}\left(Z_n = k\right) = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$ pour tout $k \in [\![1;N]\!]$. Par linéarité de l'espérance, on trouve $E(Z_n) = N + 1 - E(T_n)$ et ensuite $v(Z_n) = v(T_n)$.

**(6).** On peut proposer, en supposant que la valeur $N$ est saisie dans le corps de programme par l'utilisateur et en supposant que `Pascal` distingue $N$ et $n$ (ce qui n'est pas le cas) :