Exercice| [5054] | 1| Famille de variables aléatoires | HEC|ESSEC 2003 Filière ECS

On considère une fonction réelle φ continue sur $[0;1]$. On note M le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur $[0;1]$. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel v de $[0;1]$, on note $Y_{n,v}$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et v.

(1). Soit n un entier naturel non nul, x un réel de $]0;1[$, ε un réel strictement positif vérifiant les inégalités :
$$0 < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon < 1$$

(a). Comparer, pour tout réel v de $[x+\varepsilon;1]$, les événements $[Y_{n,v} \le nx]$ et $[|Y_{n,v}-nv| \ge n(v-x)]$ et en déduire les inégalités :
$$\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx) \le \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \le \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

(b). Justifier d'une façon analogue, pour tout réel $v \in [0;x-\varepsilon]$, l'inégalité : $\mathbb{P}(Y_{n,v} > nx) \le \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

(c). Établir les inégalités :
$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v)\mathbb{P}([Y_{n,v} \le nx])\,\mathrm{d}v\right| \le \frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \left|\int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\left(1-\mathbb{P}([Y_{n,v} \le nx])\right)\right.$$

(d). En déduire l'inégalité :
$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}([Y_{n,v} \le nx])\,\mathrm{d}v\right| \le \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2}+2\varepsilon\right)M$$

(2). Établir que, pour tout réel $x \in]0;1[$, on a pour tout entier naturel n assez grand, l'inégalité :
$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}([Y_{n,v} \le nx])\,\mathrm{d}v\right| \le \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

(3). On suppose maintenant que la fonction φ vérifie, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)v^n\,\mathrm{d}v = 0$.

(a). Justifier, pour tout polynôme P à coefficients réels, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)P(v)\,\mathrm{d}v = 0$.

(b). Déduire des questions précédentes que, pour tout réel $x \in]0;1[$, on a l'égalité $\displaystyle\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v = 0$.

(c). Montrer que la fonction φ est nulle.

Éléments de correction

(1).(a). Soit $v \in [x+\varepsilon;1]$. On a : $[|Y_{n,v}-nv| \ge n(v-x)] = [Y_{n,v}-nv \ge n(v-x)] \cup [Y_{n,v}-nv \le -n(v-x)]$. Par ailleurs :
$$[Y_{n,v} \le nx] = [Y_{n,v}-nv \le nx-nv] = [Y_{n,v}-nv \le n(x-v)] = [Y_{n,v} \le -n(v-x)]$$
On en déduit donc que $[Y_{n,v} \le nx] \subset [|Y_{n,v}-nv| \ge n(v-x)]$.
Par suite, on obtient : $\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx) \subset \mathbb{P}(|Y_{n,v}-nv| \ge n(v-x))$, et en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $Y_{n,v}$, qui admet un moment d'ordre 2 et qui est telle que $E(Y_{n,v}) = nv$, on en déduit :
$$\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx) \subset \mathbb{P}(|Y_{n,v}-nv| \ge n(v-x)) \le \frac{v(Y_{n,v})}{(n(v-x))^2} = \frac{v(1-v)}{n(v-x)^2}$$
Or $v-x \ge \varepsilon > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{(v-x)^2} \le \dfrac{1}{\epsilon^2}$. De plus, une simple étude de la fonction $v \longmapsto v(1-v)$ sur $[0;1]$, montre que cette dernière a un maximum en $v = \dfrac{1}{2}$ qui est $\dfrac{1}{4}$.

Finalement, on a $\dfrac{v(1-v)}{n(v-x)^2} \le \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

(b). Sur le même principe, avec $v \in [0;x-\varepsilon]$, on a :
$$[Y_{n,v} > nx] \subset [Y_{n,v} \ge nx] = [Y_{n,v}-nv \ge n(x-v)] \subset [|Y_{n,v}-nv| \ge n(x-v)]$$
et comme $E(Y_{n,v}) = nv$, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchbychev, on, obtient :
$$\mathbb{P}(Y_{n,v} > x) \le \mathbb{P}(|Y_{n,v}-E(Y_{n,v})| \ge n(x-v)) \le \frac{v(Y_{n,v})}{(n(x-v))^2} = \frac{v(1-v)}{n(x-v)^2}$$
Comme précédemment, on montre que $\dfrac{v(1-v)}{n(v-x)^2} \le \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$, et l'on obtient la majoration demandée.

(c). Pour tout $v \in [x+\varepsilon;1]$, on a $0 \le |\varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)| = |\varphi(v)|\,\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx) \le \dfrac{M}{4n\varepsilon^2}$. Par intégration de cette inégalité sur $[x+\varepsilon;1]$, et comme $x+\varepsilon < 1$ pour l'ordre des bornes, on a :
$$\left|\int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v\right| \le \int_{x+\varepsilon}^1 |\Phi(v)|\,\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v \le \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{M}{4n\varepsilon^2}\,\mathrm{d}v = \frac{M}{4n\varepsilon^2}(1-x-\varepsilon) \le$$
D'où la première inégalité.
Pour la deuxième inégalité, on intègre sur l'intervalle $[0;x-\varepsilon]$ où l'on a bien $0 < x-\varepsilon$ pour l'ordre des bornes.

(d). On utilise la relation de Chasles dans chacune des deux intégrales de sorte à faire apparaître les intervalles sur lesquels on pourra avoir les majorations de la question précédente. On a alors :
$$\begin{aligned}
\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v &= \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\,\mathrm{d}v + \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v}\\
&\quad - \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v - \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v}\\
&\quad - \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v\\
&= \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\left(1-\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\right)\mathrm{d}v + \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(v)(1\\
&\quad - \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v - \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v}
\end{aligned}$$
À l'aide de l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on en déduit que :
$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v\right| &\le \int_0^{x-\varepsilon} |\varphi(v)\left(1-\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\right)|\,\mathrm{d}v + \int_{x-\varepsilon}^x |\varphi(v)\\
&\quad + \int_x^{x+\varepsilon} |\varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)|\,\mathrm{d}v + \int_{x+\varepsilon}^1 |\varphi(v)\mathbb{P}(Y\\
&\le \frac{Mx}{4n\varepsilon^2} + \int_{x-\varepsilon}^x |\varphi(v)|\left(1-\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\right)\mathrm{d}v\\
&\quad \int_x^{x+\varepsilon} |\varphi(v)|\,\mathbb{P}(Y_{n,v} \le nx)\,\mathrm{d}v + \frac{M(1-\varepsilon)}{4n\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Une majoration grossière de $\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon} |\varphi(v)|\, \mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v$ est $\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon} |\varphi(v)|\, \mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v \leq \int_x^{x+\varepsilon} M\, \mathrm{d}v = M\varepsilon$, et pour $\displaystyle\int_{x-\varepsilon}^{x} |\varphi(v)|\,(1-\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx))\, \mathrm{d}v$, on a $\displaystyle\int_{x-\varepsilon}^{x} |\varphi(v)|\,(1-\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx))\, \mathrm{d}v \leq \int_{x-\varepsilon}^{x} M\, \mathrm{d}v = M\varepsilon$, puisqu'une probabilité est dans $[0;1]$ et $|\varphi|$ est majorée par M.
Par suite :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\, \mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v\right| \leq \frac{Mx}{4n\varepsilon^2} + M\varepsilon + M\varepsilon + \frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2} = \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon\right) M$$

(2). La relation précédente étant vraie pour tout ε satisfaisant aux conditions données en début d'énoncé, et donc à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, il suffit de chercher un minorant de la quantité $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon$ indépendant de ε, autrement dit on étudie la fonction $\varepsilon \longmapsto \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon$. On montre alors que son minimum est atteint en $\varepsilon = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4n}}$ et vaut $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}$. Pour n assez grand, la quantité $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4n}}$ est clairement dans l'intervalle $]0; \min(x, 1-x)[$, et on peut donc utiliser la majoration précédente, pour obtenir :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\, \mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v\right| \leq \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

(3). (a). Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ où $(a_0, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$. Alors $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)P(v)\, \mathrm{d}v = \sum_{k=0}^{r} \varphi(v)u^k\, \mathrm{d}v = 0$, d'où le résultat.

(b). Soit $x \in]0;1[$. Pour n assez grand, on a $\left|\displaystyle\int_0^x \varphi(v)\, \mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v\right| \leq \dfrac{9}{4\sqrt[3]{n}}$.
Or, compte-tenu de l'expression de la loi binomiale, $\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)$ est un polynôme en v, et donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)\mathbb{P}(Y_{n,v} \leq nx)\, \mathrm{d}v = 0$ ce qui donne $\left|\displaystyle\int_0^x \varphi(v)\, \mathrm{d}v\right| \leq \dfrac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$ et on obtient le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$ pour avoir l'égalité demandée sur $]0;1[$.

(c). Puisque φ est continue sur $[0;1]$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(v)\, \mathrm{d}v$ est la primitive de φ sur $[0;1]$ qui s'annule en 0 et qui d'après la question précédente est constante égale à 0. Elle a pour dérivée $\varphi(x)$ sur $[0;1[$, qui est donc nulle par dérivation d'une fonction constante. Et comme φ est continue sur $[0;1]$, elle est donc identiquement nulle sur $[0;1]$.